الرياضيات العامة

القسم الأدبى

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب الفصل الدراسى الأول

الرياضيات العامة

القسم الأدبى

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب الفصل الدراسى الأول



SAKKARA PUBLISHING

- إن التنافس مع الذات هو أفضل تنافس.
- من وثق بالله أغناه ومن توكل عليه كفاه.
- من يعش فى خوف، فلن يكون حرًا أبدًا.
- امدح صديقك علنًا وعاتبه سرًا.
- اختر كلماتك قبل أن تتحدث.
- الشعوب وحدها هى القادرة على تحرير نفسها وتحقيق أحلامها.

الرياضيات العامة

القسم الأدبى

كتاب الطالب

فصل الدراسى الأول

الرياضيات العامة

القسم الأدبى

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب

الفصل الدراسى أول



إعداد

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ.م.د/ عصام وصفى روفائيل

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى

أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

جميع الحقوق محفوظة لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر

ش.م.م

SAKKARA PUBLISHING

المقدمة

بسم اللّه الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هى مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات فى حياته اليومية, والتى تساعده على المشاركة فى المجتمع.

٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتى والتعلم النشط والتعلم التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

٣ تقديم رؤى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع(STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرُّف الواعى الفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراستها وتقدير علمائها.

٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.

٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقينى؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التى تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية بطريقة شيقة ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة مشوقة وسهلة، وتشمل بعضها مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند تمارين وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التى دراسها الطالب فى الدرس وتشمل أيضًا تطبيقات متنوعة فى مجالات مختلفة.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل وتطبيقات متنوعة على المفاهيم والمهارات التى درسها الطالب فى هذه الوحدة.

★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة تشتمل على المفاهيم والمهارات التى دراسها الطالب فى هذه الوحدة.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

واللّه من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الدوال ذات المتغير الحقيقى ورسم المنحنيات

الدرس الأول: الدالة الحقيقية ٤

الدرس الثانى: إطراد الدوال ١١

الدرس الثالث: الدوال الزوجية والدوال الفردية ١٤

الدرس الرابع: تحويلات الرسوم البيانية ١٩

الدرس الخامس: المعادلات والمتباينات ٣٦

ملخص الوحدة ٤٣

تمارين عامة ٤٥

اختبار تراكمى ٤٧

الوحدة الثانية: الاسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

الدرس الأول: الأسس الكسرية ٥٠

الدرس الثانى: الدالة الآسية ٥٨

الدرس الثالث: حل المعادلات الأسية وتطبيقاتها ٦٢

الدرس الرابع: الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها ٦٧

الدرس الخامس: بعض خواص اللوغاريتمات ٧٢

ملخص الوحدة ٧٩

تمارين عامة ٨١

اختبار تراكمى ٨٣

المحتويات

الوحدة الثالثة: النهايات

الدرس الأول: مقدمة فى النهايات ٨٦

الدرس الثانى: ايجاد نهاية الدالة جبريًا ٩٢

الدرس الثالث: نهاية الدالة عند اللا نهاية ٩٩

ملخص الوحدة ١٠٥

تمارين عامة ١٠٦

اختبار تراكمى ١٠٧

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

الدرس الأول: قانون (قاعدة) الجيب ١١٠

الدرس الثانى: قانون (قاعدة) جيب التمام ١٢٠

ملخص الوحدة ١٣٢

تمارين عامة ١٣٣

اختبار تراكمى ١٣٦

اختبارات عامة ١٣٧

إجابات بعض التمارين ١٥١

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

Real Functions



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم الدالة ذات المتغير الحقيقى
- يحدد مجال الدوال ذات المتغير الحقيقى، والمجال المقابل والمدى لها.
- يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية ويفرق بينهما.
- يستنتج إطراد الدوال ذات المتغير الحقيقى (تزايد الدوال – تناقص الدوال – ثبوت الدوال).
- يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- يرسم منحنيات الدوال (الدالة التربيعية – دالة المقياس – الدالة التكعيبية – الدالة الكسرية د(س) = $\frac{1}{س}$) ويستنتج خواص كل منها.
- يستنتج تأثير كل من التحويلات:
 د(س ± أ)، د(س) ± أ على الدوال السابقة.
- يستنتج تأثير د(اس)، اد(س) على الدوال السابقة.
- يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال ذات المتغير الحقيقى.
- يحل معادلات على الصورة:
 |أ س + ب| = جـ ، |أ س + ب| = |د س + جـ|
- يحل متباينات على الصورة:
 |أ س + ب| < جـ ، |أ س + ب| > جـ ،
 |أ س + ب| ≤ جـ ، |أ س + ب| ≥ جـ
- يستخدم الدوال ذات المتغير الحقيقى فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة فى صورة مختلفة.

المصطلحات الأساسية

دالة	*Function*	دالة فردية	*Odd function*	تحويل هندسى	*Transformation*		
دالة تزايدية	*Increasing function*	دالة ثابتة	*Constant function*	مجال	*Domain*		
دالة مقياس	*Modulus function*	دالة تكعيبية	*Cubic function*	مجال مقابل	*Co–Domain*		
دالة زوجية	*Even function*	دالة كثيرة الحدود	*polynomial function*	إطراد دالة	*Monotony of a function*		
دالة تناقصية	*Decreasing function*	دالة كسرية	*Rational function*				
دالة تربيعية	*Quadratic function*	مدى	*Range*				

دروس الوحدة

الدرس الأول: الدالة الحقيقية.

الدرس الثانى: أطراد الدوال.

الدرس الثالث: الدوال الزوجية والدوال الفردية.

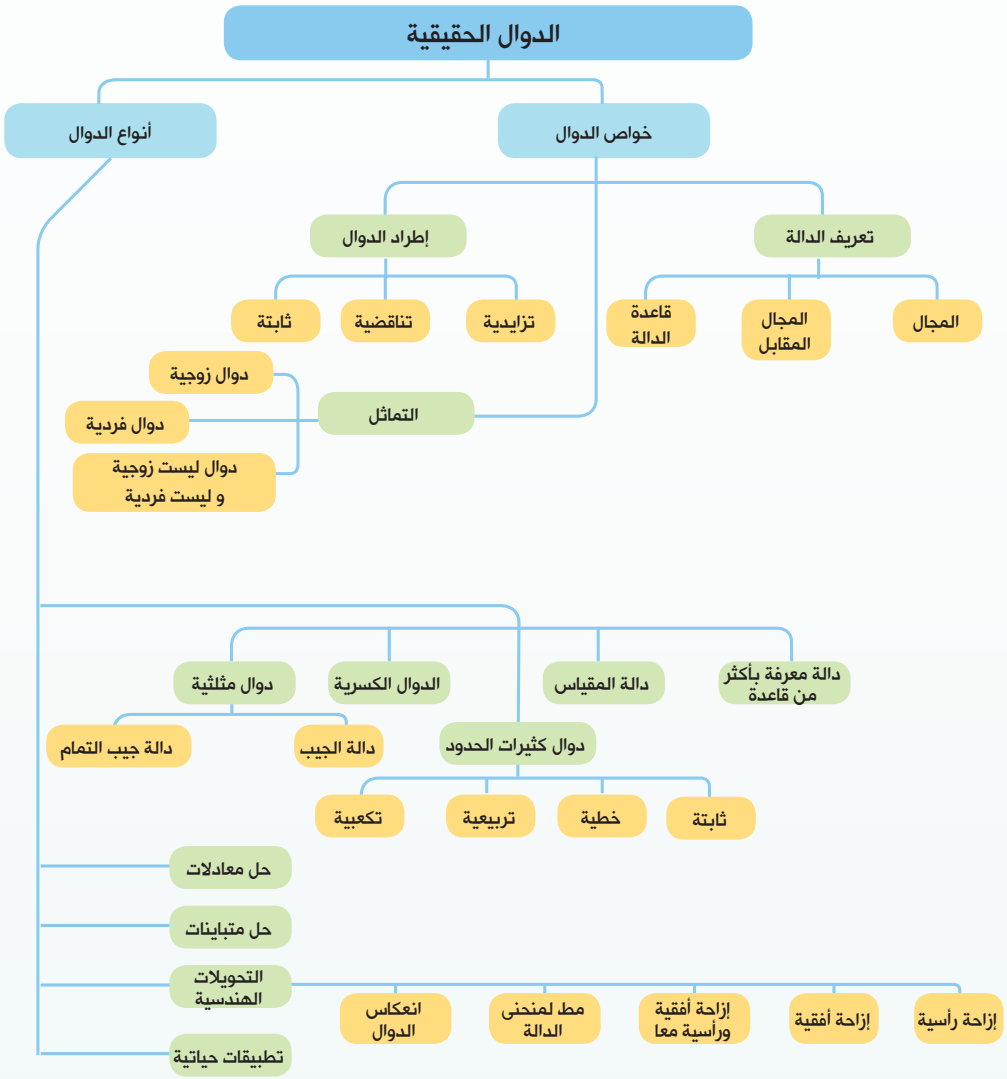
الدرس الرابع: التحويلات الهندسية على الدوال.

الدرس الخامس: المعادلات والمتباينات.

مقدمة الوحدة

كان لبردية الكاتب المصرى أحمس التى نسخها عام ١٦٥٠ق.م والتى تتناول دراسة حول المتتابعات الحسابية والهندسية ومعادلات الدرجتين الأولى والثانية مثل المعادلتين ص = $\frac{٣}{٤}$ س، س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ الدور الأكبر والأساس فى اكتشاف نظرية فيثاغورث، وقد نقل البابليون هذه الدراسات بعد ذلك بوضع جداول للمربعات والمكعبات، وحلوا معادلات الدرجة الثانية والثالثة، كما عرّف الإغريق الحل الهندسى لهذه المعادلات ، ولقد اشتغل العرب بالجبر وأعدوه بطريقة علمية منظمة، وكان من أبرز علمائهم الخوارزمى والخيام، وقد استمرت المؤلفات العربية سارية المفعول قام علماء الغرب بتطوير الأبحاث العربية فى الرياضيات ومن أبرز علمائهم العالمان الفرنسيان إيناريست جالو (١٨١١ - ١٨٧٣) وهرميت شارل (١٨٢٢ - ١٨٧٦) والألمانى كلاين فيلكس (١٨٤٩ - ١٩٢٥). والأمل معقود عليكم أبناءنا الطلاب فى استعادة مجدنا العلمى فى عصوره الذهبية لنهضة ورفعة بلدنا مصر الحبيبة.

مخطط تنظيمى للوحدة



آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة رسومية - جهاز الكمبيوتر مزود ببرامج رسومية

الأدوات والوسائل

الوحدة الأولى

الدرس ١

الدالة الحقيقية

Real Functions

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسى.
- الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة.

المصطلحات الأساسية

دالة	*Function*
مجال	*domain*
مجال مقابل	*co-domain*
مدى	*range*
مخطط سهمى	*arrow diagram*
مخطط بيانى	*Cartesian diagram*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب

فكر و ناقش

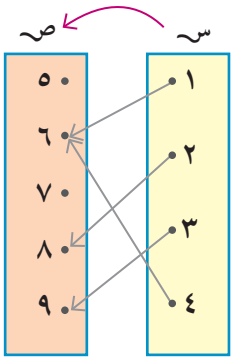
درست فى الأعوام السابقة مفهوم الدالة، وعلمت بأنها علاقة بين مجموعتين غير خاليتين س، ص بحيث يرتبط كل عنصر من س بعنصر واحد فقط من عناصر ص ويرمز للدالة بأحد الرموز (د، و، ر،)

وتكتب الدالة د من المجموعة س إلى المجموعة ص كالآتى: د: س ⟵ ص

وتقرأ دالة من س إلى ص ويستخدم الرمز د(س) للتعبير عن الدالة وتمثل د(س) قيمة ص التى ترتبط بقيمة س وتكتب ص = د(س)

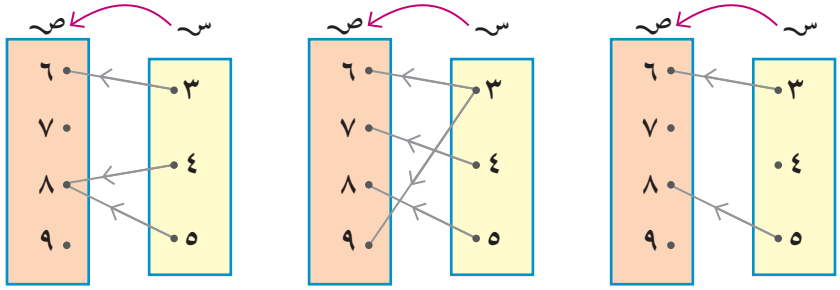
مثال

(١) العلاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص الممثلة فى المخطط السهمى المجاور تمثل دالة حيث المجموعة س هى مجال الدالة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} والمجموعة ص المجال المقابل للدالة = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}، أما مجموعة العناصر {٦ ، ٨ ، ٩} فتعرف بمدى الدالة.



حاول أن تحل

(١) أى من العلاقات المبينة بالمخطوطات السهمية الآتية تمثل دالة وأيها لاتمثل دالة، ثم اكتب المجال والمدى فى حال كونها دالة:



التعبير عن الدالة

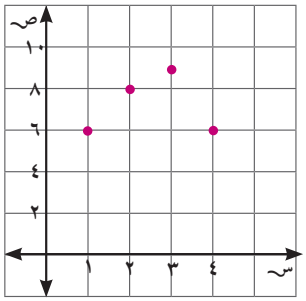
تتحدد الدالة متى عُلم كُلٌّ من:

- المجال.
- المجال المقابل.
- قاعدة الدالة.

تذكر أن

مدى الدالة هو مجموعة العناصر (الصور) فى المجال المقابل التى يكون لها أصل فى المجال.

مدى الدالة مجموعة جزئية من المجال المقابل



ويعبر عن الدالة بإحدى الطريقتين:

١ - بيان الدالة: إذا كانت د: س ⟵ ص فإن مجموع الأزواج المرتبة تسمى بيان الدالة فى المثال السابق تكون مجموعة الأزواج المرتبة هى {(١، ٦)، (٢، ٨)، (٣، ٩)، (٤، ٦)} يمكن تمثيلها فى المستوى الديكارتى كما فى الشكل المقابل.

حيث نلاحظ أن كل خط رأسى فى الشبكة البيانية يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل عناصر الدالة.

٢ - قاعدة الدالة: إذا كان (س، ص) ينتميان لبيان الدالة فإن العنصر ص يسمى صورة العنصر س للدالة ونعبر عن ذلك بالصورة ص = د(س) وتسمى هذه قاعدة الدالة.

مثال

(٢) أي من العلاقات الآتية دالة مع ذكر السبب؟

(أ) ص = ٢س^{٢} - ١ (ب) ص^{٢} = ٣س^{٢} + ٤

الحل

(أ) العلاقة ص = ٢س^{٢} - ١ دالة .

لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة فقط للمتغير ص

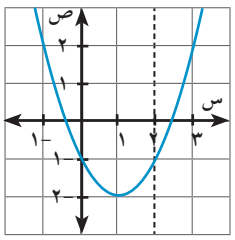
فمثلًا : عندما س = ٢ فإن ص = ٧ وهكذا عند إعطاء س أي قيمة أخرى تناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص.

(ب) العلاقة ص^{٢} = ٣س^{٢} + ٤ ليست دالة

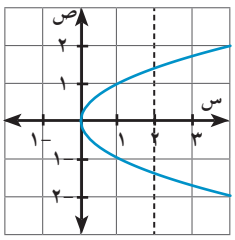
فمثلًا : عندما س = ٢ فإن ص = ± ٤

اختبار الخط الرأسى

إن الخط الرأسى عند أى عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة فإن العلاقة تكون دالة.



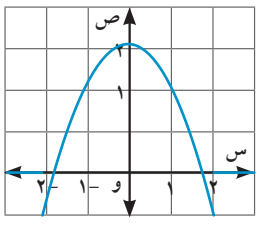
دالة



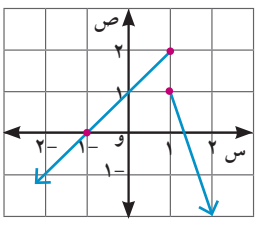
ليست دالة

مثال **تحديد العلاقات التى تمثل دالة**

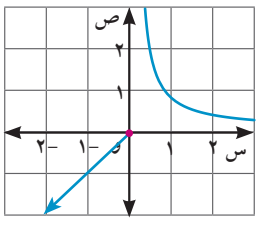
(٣) فى كل شكل من الأشكال الآتية بين: ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا؟



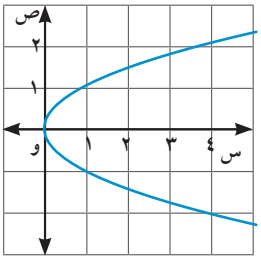
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

الحل

شكل (١) يمثل دالة .

شكل (٢) لا يمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البيانى فى نقطتين.

شكل (٣) يمثل دالة.

شكل (٤) لا يمثل دالة؛ لأنه يوجد خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

حاول أن تحل

(٢) فى كل علاقة مما يأتى حدد: ما إذا كانت ص تمثل دالة في س أم لا؟

أ تمثل س رقم جلوس الطالب، ص مجموع درجاته فى امتحان الفصل الدراسى الأول.

ب تمثل مجموعة الأزواج المرتبة {(٢، ٣)، (٣، ٤)، (-٢، ١)، (٣، ٥)} بيانًا لعلاقة ما.

مثال

تعيين مجال الدالة جبريًّا

(٤) عين مجال كل من الدوال الآتية:

أ $د_١(س) = ٢س^٢ + ٣س + ١$

ب $د_٢(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$

ج $د_٣(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٤}$

الحل

أ الدالة $د_١$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية، لذلك فإن مجالها ع .

ب الدالة $د_٢$ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = صفرًا لذلك نضع

$س^٢ - ٩ = ٠$ فتكون $س = \pm ٣$ ومن ذلك فإن مجال الدالة = ع - {-٣، ٣}.

ج الدالة $د_٣$ بوضع $س^٢ + ٤ = ٠$ وهذه المعادلة ليس لها حل فى ع. أى لا يوجد أصفار حقيقية للمقام لذلك، فإن مجال الدالة $د_٣$ هو ع.

تذكر أن

تسمى الدالة التى تعطى بالقاعدة: $د_ن(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن$ حيث $أ_٠، أ_١، أ_٢، + أ_ن \in ع، أ_ن \neq ٠$ بالدالة كثيرة الحدود ويكون مجالها هو ع.

كما تسمى الدالة د(س) = $\frac{و(س)}{ع(س)}$ حيث و، ع كثيرتا حدود بالدالة الكسرية ومجالها هو ع مجموعة أصفار المقام.

حاول أن تحل

(٣) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_١(س) = س^٢ + ٢س$

ب $د_٢(س) = \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

ج $د_٣(س) = \frac{٢س^٢}{س^٢ + ٣س}$

مثال

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

Function defined by more than one rule

(٥) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } -٢ \leq س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$ ارسم الشكل البيانى للدالة، واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

الحل

د(س) = ٣ - س تمثل دالة خطية محدودة على الفترة س $\in$ [-٢ ، ٢[وبالمثل د(س) = س تمثل دالة خطية محدودة على الفترة س $\in$ [٢ ، ٥].

لذلك نوجد:

د(-٢) = ٣ - (-٢) = ٥

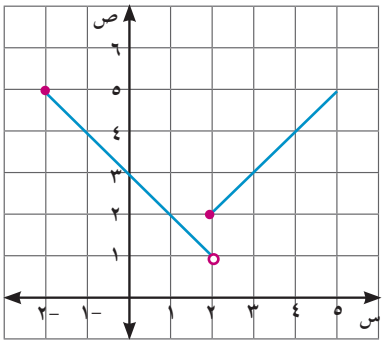
د(٢) = ٢

د(٥) = ٥

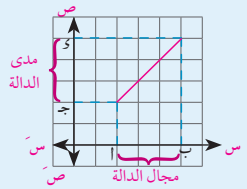
من الرسم نجد أن:

مجال الدالة = [-٢ ، ٥]

مدى الدالة =]١ ، ٥]



لاحظ أن



في الشكل البياني الممثل للدالة د فإن

مجال الدالة = [أ ، ب]

مدى الدالة = [جـ ، ء]

حاول أن تحل

٤ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٠ \\ س + ١ & \text{عندما } س \geqslant ٠ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة، واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

٦ **الربط بالتجارة:** تمثل الدالة د حيث

د(س) = $\begin{cases} \frac{٥}{٢} س & \text{حيث } ٠ \leqslant س \leqslant ٥٠٠٠ \\ ٢س + ٢٥٠٠ & \text{حيث } ٥٠٠٠ < س \leqslant ١٥٠٠٠ \\ \frac{٣}{٢} س + ١٠٠٠٠ & \text{حيث } ١٥٠٠٠ < س \leqslant ٦٠٠٠٠ \end{cases}$

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ د(٥٠٠٠) ب د(١٠٠٠٠) ج د(٥٠٠٠٠)

الحل

أ لإيجاد د(٥٠٠٠) نستخدم القاعدة د(س) = $\frac{٥}{٢}$ س

د(٥٠٠٠) = $\frac{٥}{٢}$ × ٥٠٠٠ بالتعويض عن س = ٥٠٠٠

د(٥٠٠٠) = ١٢٥٠٠ جنيه

ب لإيجاد د(١٠٠٠٠)

نلاحظ أن ١٠٠٠٠ أكبر من ٥٠٠٠ وأقل من ١٥٠٠٠ لذلك نستخدم القاعدة د(س) = ٢س + ٢٥٠٠

د(١٠٠٠٠) = ٢ × ١٠٠٠٠ + ٢٥٠٠ بالتعويض عن س = ١٠٠٠٠

د(١٠٠٠٠) = ٢٢٥٠٠ جنيه

ج لإيجاد د(٥٠٠٠٠)

نلاحظ أن ٥٠٠٠٠ أكبر من ١٥٠٠٠ وأقل من ٦٠٠٠٠

د(٥٠٠٠٠) = $\frac{٣}{٢}$ × ٥٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠ بالتعويض عن س = ٥٠٠٠٠

د(٥٠٠٠٠) = ٨٥٠٠٠ جنيه

حاول أن تحل

٥ إذا كان د(س) = { ٣س حيث ٠ ⩽ س ⩽ ١٢ ؛ ٣٦ حيث ١٢ < س < ٢٤ ؛ ١٨٠ - ٦ س حيث ٢٤ ⩽ س ⩽ ٣٠ } أوجد:

أ د(١٢) ب د(٢٠) ج د(٢٨)

نشاط

العمليات على الدوال الحقيقية: *Operations on real functions*

إذا كانت د١ ، د٢ دالتين مجالاهما م١ ، م٢ فإن:

١ (د١ ± د٢) (س) = د١ (س) ± د٢(س) ، مجال (د١ ± د٢) هو م١ ∩ م٢

٢ (د١ . د٢) (س) = د١ (س). د٢(س) ، مجال (د١ . د٢) هو م١ ∩ م٢

٣ $(\frac{د_1}{د_2})(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث د٢ (س) ≠ ٠ مجال $(\frac{د_1}{د_2})$ هو (م١ ∩ م٢) - ف (د٢)

حيث ف (د٢) مجموعة أصفار د٢

نلاحظ أنه فى جميع الحالات السابقة أن مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى د١ ، د٢ باستثناء القيم التى تجعل د٢(س) = ٠ فى عملية القسمة.

إذا كان : د١ : ع ⟵ ع حيث د١ (س) = ٣ س - ١،

د٢ : [-٢، ٣] ⟵ ع حيث د٢ (س) = ٢ س + ٤

فأوجد

أ (د١ + د٢) (س) ب (د١ - د٢) (س)

ج (د١ . د٢) د (س) د $(\frac{د_1}{د_2})$ (س)

الحل



م١ (مجال د١) = ع ، م٢ (مجال د٢) = [-٢، ٣]

م١ ∩ م٢ = [-٢، ٣]

أ (د١ + د٢) (س) = (٣س -١) + (٢س +٤) = ٥س + ٣ ومجالها [-٢، ٣]

ب (د١ - د٢) (س) = (٣س -١) - (٢س +٤) = س - ٥ ومجالها [-٢، ٣]

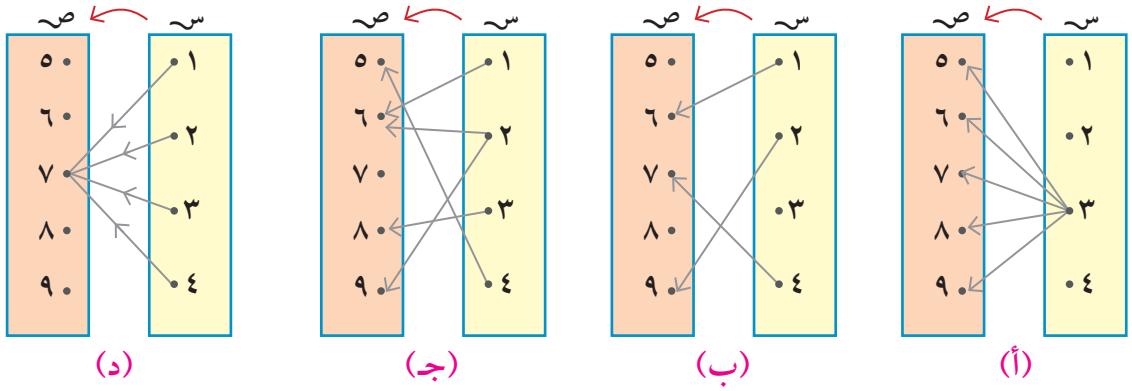
ج (د١.د٢) (س) = (٣س -١)(٢س +٤) = ٦س^{٢} +١٠س -٤ ومجالها [-٢، ٣]

د $(\frac{د_1}{د_2})(س) = \frac{٣س-١}{٢س+٤}$ ومجالها]-٢، ٣[

تمـــاريـن الدرس الأول

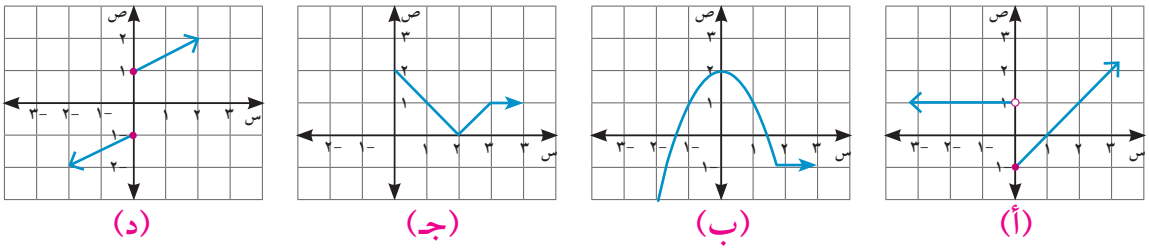
(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ العلاقة المبينة بالمخططات السهمية التالية والتى تمثل دالة هى:



(أ) (ب) (جـ) (د)

ب العلاقة المبينة فى الأشكال البيانية التالية والتى لا تمثل دالة هى:



(أ) (ب) (جـ) (د)

جـ أى من العلاقات الآتية لا تمثل دالة؟

(أ) {(١، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ٧)، (٧، ٩)}
(ب) {(٢، ٣)، (٣، ٤)، (٢، ١)، (٣، ٥)}
(جـ) {(٠، ٣)، (١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)}
(د) {(-٣، ٥)، (-١، ٥)، (٠، ٥)، (٢، ٥)}

د جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة:

(أ) ص = ٣س + ١ (ب) ص = س^{٢} - ٤ (جـ) س = ص^{٢} - ٢ (د) ص = س^{٣}

(٢) إذا كان د : سـ ⟵ صـ وكان سـ = {أ، ب، جـ}، صـ = {٣، ٤، ٥، ٦، ٧} وكان:

ع$_{١}$ = {(أ، ٤)، (ب، ٧)، (جـ، ٣)}، ع$_{٢}$ = {(أ، ٣)، (ب، ٣)، (جـ، ٣)}

أ هل ع$_{١}$، ع$_{٢}$ دالتان؟ ولماذا؟ ب ارسم المخطط السهمى.

(٣) إذا كانت د: سـ ⟵ ع وكان سـ = {١، ٢، -٢، -٣}

أوجد مدى الدالة إذا كان د(س) = ٥س - ٣

(٤) إذا كان سـ = {الأهرامات، معبد الكرنك، قلعة قايتباى}، صـ هى مجموعة محافظات جمهورية مصر العربية.
وكان د : سـ ⟵ صـ انسب المناطق الأثرية للمحافظات التى توجد بها، مثل هذه الدالة بمخطط سهمى.

٥ إذا كانت ر : {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ⟵ صـ حيث ر(س) = ٤س - ٣

أ اكتب مدى الدالة

ب إذا كانت ر(س) = ١٧ فإوجد قيمة س.

٦ عين مجال الدالة د فى كل مما يأتى:

أ $د(س) = \frac{١}{٢}$

ب د(س) = ٢س + ٣

جـ د(س) = س^{٢} + ٣س

د $د(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

هـ $د(س) = \frac{-٧}{س^{٢} - ٢س + ٣}$

و $د(س) = \frac{س + ٢}{س^{٣} + ٨}$

٧ إذا كان: د(س) = $\begin{cases} -٤س + ٣ & \text{حيث } س < ٣ \\ -س^{٣} & \text{حيث } ٣ \leqslant س \leqslant ٨ \\ ٣س^{٢} + ١ & \text{حيث } س > ٨ \end{cases}$

أوجد:

أ د(٢)

ب د(٣)

جـ د(١٠)

٨ **الربط بالهندسة:** إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل. اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح(ل)، ثم أوجد:

أ ح (٣)

ب ح$(\frac{١٥}{٤})$

٩ **الربط بالهندسة:** إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها ق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق)، ثم أوجد م$(\frac{١}{٢})$، م(٥).

١٠ **الربط بالفيزياء:** إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالكيلو متر/ ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

ع(ن) = $\begin{cases} ٨ن & \text{حيث } ٠ \leqslant ن \leqslant ١٠ \\ ٨٠ & \text{حيث } ١٠ < ن < ٢٠٠ \\ -٤ن + ٨٨٠ & \text{حيث } ٢٠٠ \leqslant ن \leqslant ٢٢٠ \end{cases}$

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

أ ع(١٠)

ب ع(١٥٠)

جـ ع(٢١٠)

إطراد الدوال

Monotony of the functions

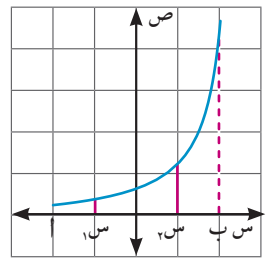
أولاً: إطراد الدوال: *Monotony of the functions*

تمهيد

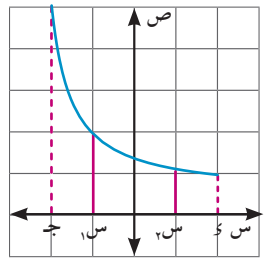
سبق أن درست بعض الدوال التى مجالها ع أو مجموعة جزئية منها، فهل يمكنك تحديد الفترات من مجال هذه الدوال التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون الدالة فيها ثابتة؟

إن تحديد هذه الفترات هو مايعرف باطراد الدالة.

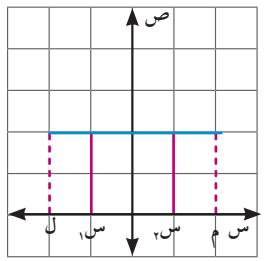
تعلم



يقال للدالة د إنها:
تزايدية فى الفترة]أ ، ب[
إذا كان لكل
س١ ، س٢ ∈]أ ، ب[
حيث: س٢ > س١
فإن د(س٢) > د(س١)



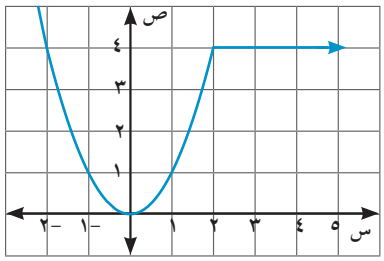
يقال للدالة د إنها:
تناقصية فى الفترة]جـ ، ء[
إذا كان لكل
س١ ، س٢ ∈]جـ ، ء[
حيث: س٢ > س١
فإن د(س٢) < د(س١)



يقال للدالة د إنها:
ثابتة فى الفترة]ل ، م[
إذا كان لكل
س ∈]ل ، م[
د(س) = أ
(حيث أ مقدار ثابت)

مثال

(١) ابحث إطراد الدالة الممثلة فى الشكل البيانى المقابل.



الحل

- الدالة تناقصية فى الفترة]-∞، ٠[
- الدالة تزايدية فى الفترة]٠، ٢[
- الدالة ثابتة فى]٢، ∞[

سوف تتعلم

- الدالة التزايدية
- الدالة التناقصية
- الدالة الثابتة

المصطلحات الأساسية

- إطراد *Montony*
- دالة تزايدية *Increasing function*
- دالة تناقصية *Decreasing function*
- دالة ثابتة *Constant function*

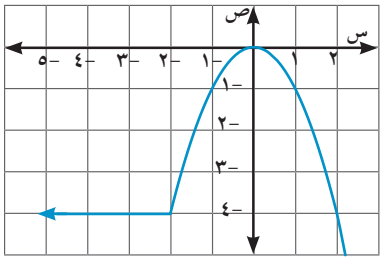
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسمومية للحاسب

حاول أن تحل

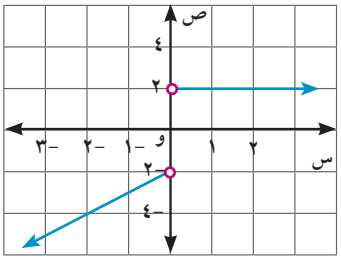
(١) فى الشكل المقابل:

ابحث الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية، والفترات التى تكون فيها تناقصية، والفترات التى تكون فيها ثابتة.

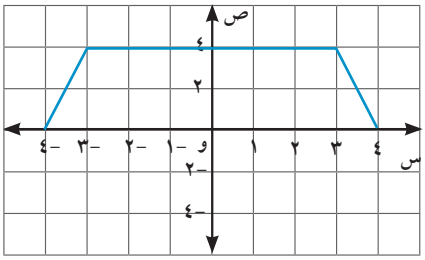


مثال

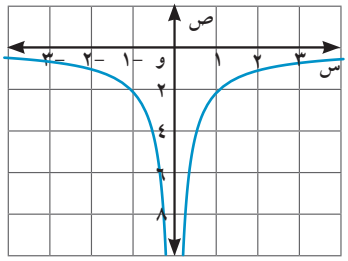
(٢) ابحث إطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية، ثم اكتب مدى الدالة:



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

شكل (١) الدالة تزايدية فى الفترة]-∞، ٠[، ثابتة فى الفترة [٠، ∞ [، [المدى =]-∞، -٢[∪ {٢}

شكل (٢) الدالة تزايدية فى الفترة]-٤، -٣[

الدالة ثابتة فى الفترة]-٣، ٣[

الدالة تناقصية فى الفترة]٣، ٤[، والمدى = [٠، ٤]

شكل (٣) الدالة تناقصية فى الفترة]-∞، ٠[

الدالة تزايدية فى الفترة]٠، ∞ [والمدى =]-∞، ٠[

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د: [-١، ٥] ⟵ ع تتحدد بالقاعدة:

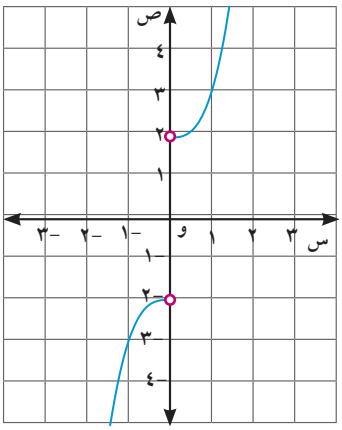
$$د(س) = \begin{cases} ٤ - س & \text{عندما } -١ \leqslant س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$$

فأوجد كلًّا من : د(-١)، د(٠)، د(٢)، د(٣)، د(٥)

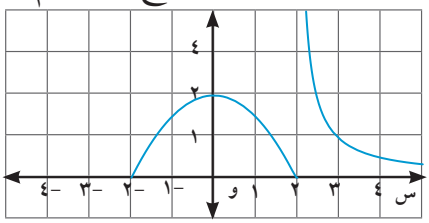
ثم ارسم الشكل البيانى للدالة، واستنتج من الرسم مدى الدالة، ثم ابحث إطرادها.

تمـــاريـن الدرس الثاني

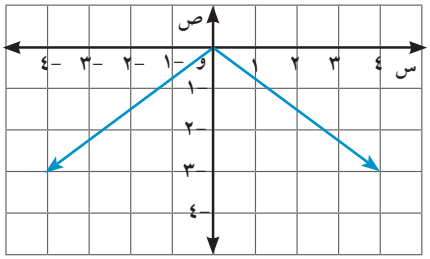
(١) الأشكال الآتية تمثل الرسم البياني لبعض الدوال، استنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها:



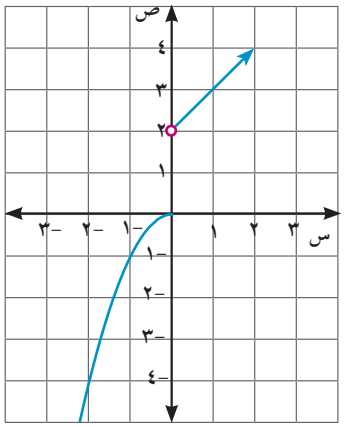
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

(٢) إذا كانت د: [-٢، ٤] ⟵ ع حيث د(س) = $\begin{cases} س - ١ & ، \ س < ٢ \\ -١ & ، \ س \geq ٢ \end{cases}$

ارسم الشكل البياني للدالة د ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة ، وابحث إطرادها.

(٣) ارسم منحنى الدالة د حيث:

د(س) = $\begin{cases} س + ٣ & ، \ س \leq ٢ \\ ٢س - ١ & ، \ س > ٢ \end{cases}$

➢ ومن الرسم أوجد مدى الدالة، وابحث إطرادها.

(٤) إذا كانت الدالة د: [-٢، ٤] ⟵ ع حيث:

د(س) = $\begin{cases} ٢س + ٣ & \text{عندما } -٢ \leq س < ٠ \\ ١ - س & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

ارسم الشكل البياني للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث إطرادها.

(٥) إذا كانت د: [-٣، ٣] ⟵ ع ، د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } -٣ \leq س < ٠ \\ س + ٢ & \text{عندما } ٠ < س \leq ٣ \end{cases}$

ارسم الشكل البياني للدالة، ومن الرسم استنتج مدى هذه الدالة.

الدوال الزوجية والدوال الفردية

Even and odd functions

سوف تتعلم

- التماثل فى الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.

المصطلحات الأساسية

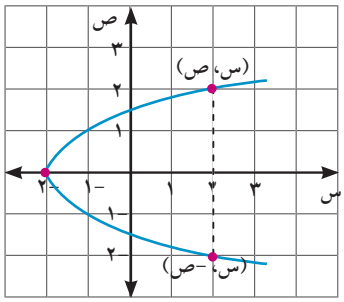
تماثل	*Symmetry*
دالة زوجية	*Even function*
دالة فردية	*Odd function*

الأدوات المستخدمة

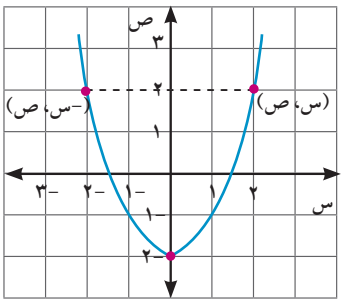
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب

تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طى الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.



التماثل حول محور السينات
شكل (١)



التماثل حول محور الصادات
شكل (٢)

فى شكل (١):

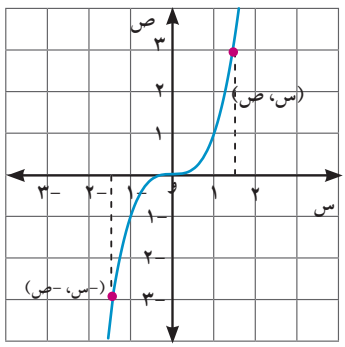
تكون النقطة (س ، -ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى العلاقة هى صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات.

فى شكل (٢):

تكون النقطة (- س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس في محور الصادات.

فى شكل (٣):

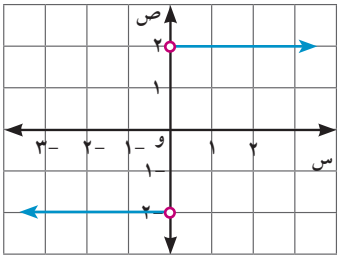
يوضح الشكل البيانى للعلاقة بين س ، ص هناك تماثل المنحنى حول نقطة الأصل حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحنى.



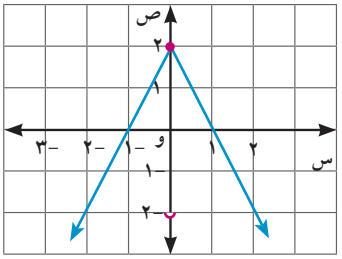
التماثل حول نقطة الأصل
شكل (٣)

حاول أن تحل

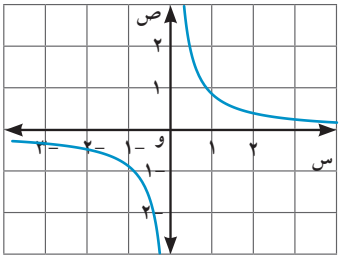
(١) بين فى كل شكل من الأشكال الآتية المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل:



(أ)



(ب)



(جـ)

الدوال الزوجية والدوال الفردية

Even and odd functions

تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة إنها زوجية إذا كان لكل - س ، س فى مجال الدالة د تكون د (- س) = د (س) ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة إنها فردية إذا كان لكل - س ، س فى مجال الدالة د يكون د (- س) = - د (س) ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

وسنكتفى عند بحث الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك من الشكل البيانى لمنحنى الدالة فقط.

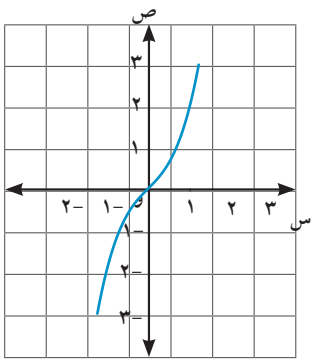
مثال

(١) باستخدام أحد البرامج الرسومية مثل كل دالة مما يأتى بيانيًّا ثم حدد: إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك؟ ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

أ د (س) = س^{٣} + س　　ب د(س) = ٢ - س^{٢}　　جـ د(س) = س^{٢} - ٤س

الحل

أ د (س) = س^{٣} + س واضح من الشكل البيانى أن منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ولتحقيق ذلك جبريًّا نجد أن:



د (-س) = (- س)^{٣} + (- س)

بالتبسيط:

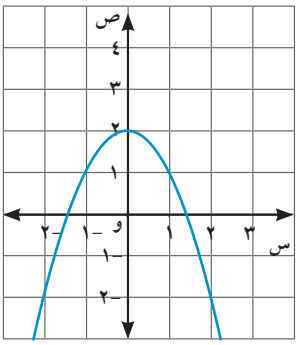
د (-س) = - س^{٣} - س

يأخذ (-١) عامل مشترك

د (-س) = - (س^{٣} + س)

د (-س) = - د (س)

أى أن الدالة فردية.



ب د (س) = ٢ - س^{٢}

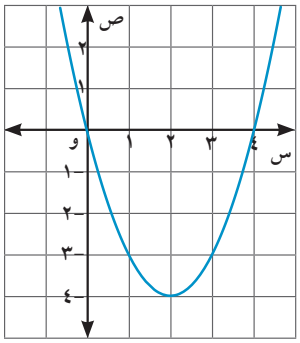
من الشكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات، أى أن الدالة زوجية ولتحقيق ذلك جبريا نجد أن:

د (-س) = ٢ - (-س)^{٢}

بالتبسيط د (-س) = ٢ - س^{٢}

الدالة الأصلية د (-س) = د (س)

أى أن الدالة زوجية



جـ د (س) = س^{٢} - ٤س من الشكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل، أى أن الدالة ليست زوجية وليست فردية، ولتحقيق ذلك جبريا:

بالتعويض عن -س بدلًا من س د (-س) = (-س)^{٢} - ٤ (-س)

بالتبسيط د (-س) = س^{٢} + ٤س

ولكن - د (س) = - (س^{٢} + ٤ س)

لذلك فإن د (-س) ≠ - د (س)

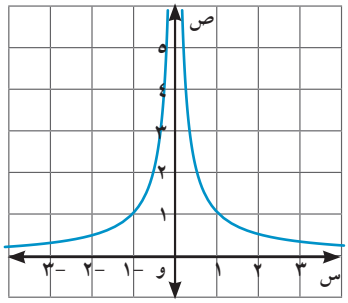
وكذلك د (- س) ≠ د (س) أى أن الدالة ليست زوجية.

حاول أن تحل

(٢) **ابحث:** أى من الدوال الآتية زوجية؟ وأيها فردية؟ وأيها غير ذلك؟

أ د$_{١}$ (س) = س + $\frac{١}{س}$ ب د$_{٢}$ (س) = س حا س جـ د$_{٣}$ (س) = ٤ $\sqrt[٨]{س}$

مثال



(٢) من الشكل المقابل أثبت أن الدالة زوجية، وأوجد مداها وابحث اطرادها.

الحل

من الشَّكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثلًا حول محور الصادات، أى أن الدالة زوجية.

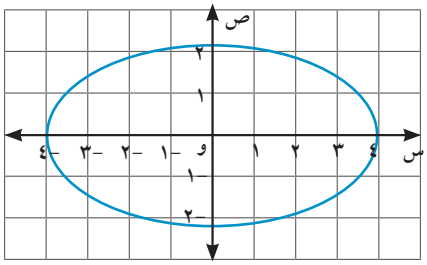
مدى الدالة =]٠، ∞[

الدالة تزايدية فى]-∞، ٠[

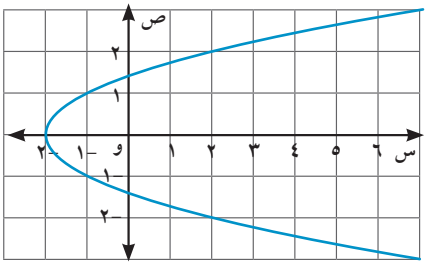
الدالة تناقصية فى]٠، ∞[

تمـــاريـن الدرس الثالث

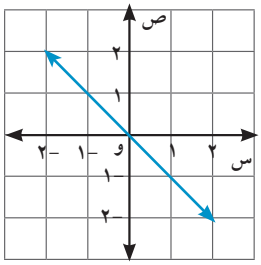
(١) اذكر: ما إذا كان تماثُل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات ، أو نقطة الأصل ثم فسر إجابتك.



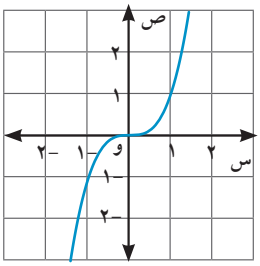
شكل (١)



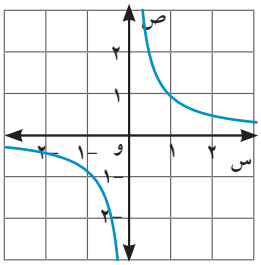
شكل (٢)



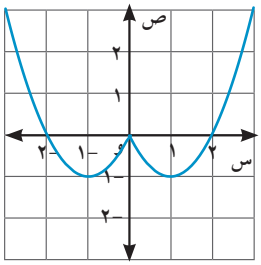
شكل (٣)



شكل (٤)

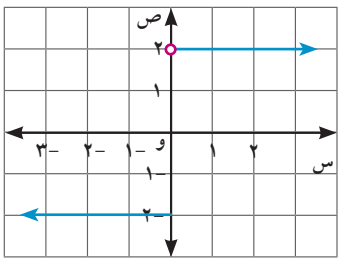


شكل (٥)

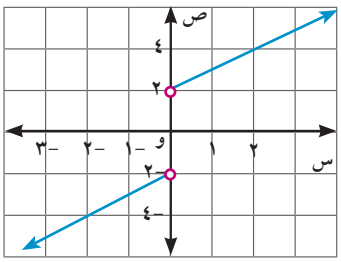


شكل (٦)

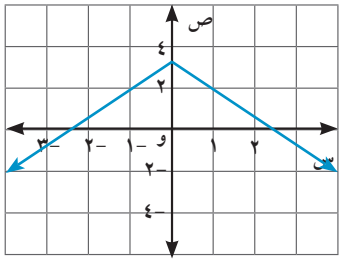
(٢) أوجد مدى كلِّ دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجيةً أو فرديةً أو غير ذلك.



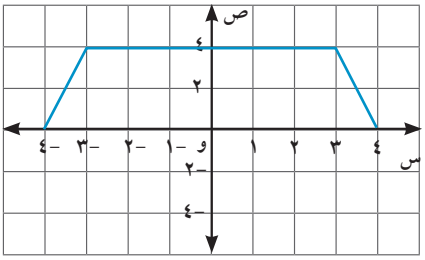
شكل (١)



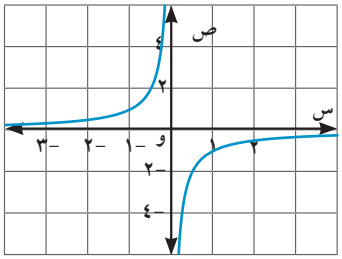
شكل (٢)



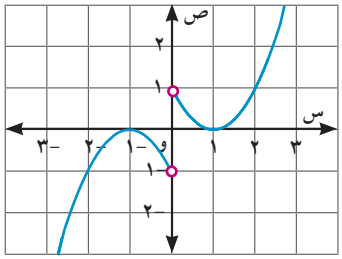
شكل (٣)



شكل (٤)

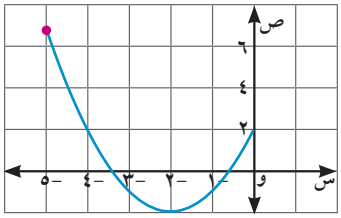


شكل (٥)

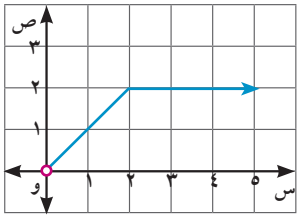


شكل (٦)

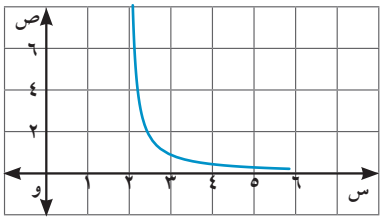
(٣) في كُلِّ شكل من الأشكال الآتية:



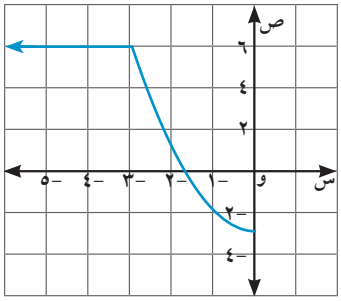
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

أولًا: أكمل الرسم فى شكل (١) ، شكل (٤) فى كراستك بحيث تصبح الدالة زوجيةً على مجالها.

ثانيًا: أكمل الرسم فى شكل (٢) ، شكل (٣) فى كراستك بحيث تصبح الدالة فرديةً على مجالها.

ثم أوجد المدى فى كل حالة.

(٤) استخدم أحد البرامج الرسومية فى رَسم منحنيات كلٍّ من الدوال الآتية ومن الرسم،بين أيها زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك ثم تحقق من إجابتك جبريا.

أ $د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١$

ب $د(س) = س - ٤ س^{٣}$

ج $د(س) = س^{٣} - \frac{١}{س}$

د $د(س) = س^{٢} - ٣س$

هـ $د(س) = \frac{س^{٣} + ٢}{س - ٣}$

و $د(س) = س$ حتا س

(٥) استخدم أحد البرامج الرسومية فى رَسم منحنيات كلٍّ من الدوال الآتية ثم بين: أى منها زوجية؟ وأيها فردية؟ وأيها غير ذلك؟ ثم أوجد المدى وابحث الأطراد.

أ $د(س) = \begin{cases} ٢ & \text{عندما } س \leqslant ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

ب $د(س) = \begin{cases} -س^{٣} ، & س \leqslant ٠ \\ س^{٣} ، & س > ٠ \end{cases}$

ج $د(س) = \begin{cases} س - ١ & \text{عندما } س \leqslant ٠ \\ ٧س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

د $د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{-١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

تحويلات الرسوم البيانية

Transformations of graphs

سوف تتعلم

- الدالة كثيرة الحدود
- التحويلات الهندسية للدالة الخطية
- التحويلات الهندسية لدالة المقياس
- التحويلات الهندسية للدالة التربيعية
- التحويلات الهندسية للدالة التكعيبية
- التحويلات الهندسية للدالة الكسرية.
- التحويلات الهندسية للدوال لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

- تحويل هندسي *Transformation*
- إزاحة *Translation*
- إنعكاس *Reflection*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب

الدالة كثيرة الحدود *The Polynomial function*

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة:

د(س) = $أ_{0}$ + $أ_{1}$ س + $أ_{2}$ $س^{2}$ + $أ_{3}$ $س^{3}$ +..... + $أ_{ن}$ $س^{ن}$

حيث: $أ_{0}$ ، $أ_{1}$ ، $أ_{2}$ ، $أ_{3}$ ،..... ، $أ_{ن}$ ∈ ع، $أ_{ن}$ ≠ ٠

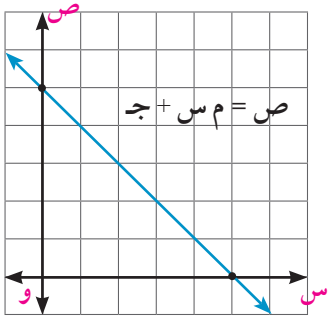
وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح (مالم يذكر غير ذلك) ، ولذلك تسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن ، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

وفيما يلى سوف نتناول دراسة لبعض الدوال كثيرة الحدود.

تعلم

الدالة الخطية *Linear function*

هى دالة تُكتب بالصورة: د(س) = م س + جـ حيث م ، جـ ثوابت، م ≠ ٠ ، (م هو ميل الخط المستقيم، جـ الجزء المقطوع من محور الصادات).



مثال

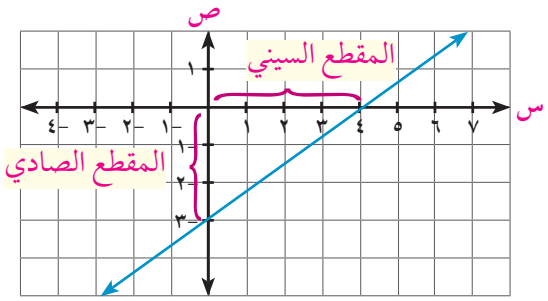
(١) اكتب الدالة التى يمثلها الخط المستقيم الذى ميله $\frac{٣}{٤}$ ويقطع من محور الصادات جزءا سالبا طوله ٣ وحدات ثم مثله بيانيًا.

الحل

د(س) = م س + جـ

بالتعويض عن: م = $\frac{٣}{٤}$ ، جـ = - ٣: ص = $\frac{٣}{٤}$ س - ٣

والتمثيل البيانى للمستقيم كما فى الشكل المجاور



حاول أن تحل

(١) اكتب الدالة التى يمثلها الخط المستقيم فى الحالات الآتية ثم مثلها بيانيًا:

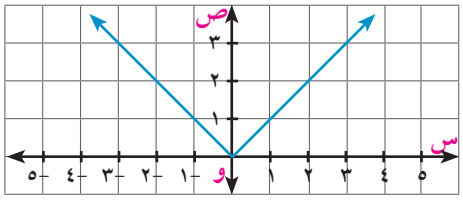
أ ميلُه = $\frac{-٣}{٤}$ ومقطعه الصادى = ٦ ب ميلُه = $\frac{١}{٢}$ ومقطعه الصادى = - ٤

تعلم

دالة المقياس (القيمة المطلقة) *Horizontal translation*

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س| وتعرف على النحو التالى:

$$د(س) = \begin{cases} س & ، \ س \geq ٠ \\ -س & ، \ س < ٠ \end{cases}$$



لاحظ أن: |- ٣| = |٣| = ٣ ، |٠| = ٠

خواص دالة المقياس:

مجالُها هو مجموعة الأعداد الحقيقية ، ومداها هو: [٠ ، ∞[، منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات، وبالتالى فإن الدالة زوجيةٌ.

التحويلات الهندسية لدالة المقياس: *Transformations of modulus function*

الإزاحة الأفقية (فى اتجاه محور السينات):

مثال

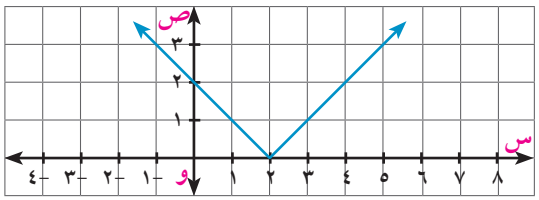
(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

أ ر(س) = |س - ٢| ب ع(س) = |س + ٣|

الحل

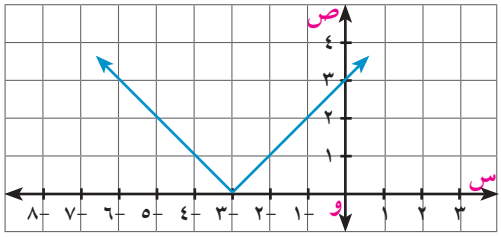
أ هذه الدالة على الصورة: ر(س) = د (س - ٢)

وعليه فإن منحنى ر(س) هو منحنى د(س) بإزاحة أفقية قدرُها ٢ وحدة إلى اليمين.



ب هذه الدالة على الصورة: ع(س) = د (س + ٣)

وعليه فإن منحنى ع(س) هو منحنى د(س) بإزاحة أفقية قدرُها ٣ وحدات إلى اليسار.



حاول أن تحل

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كُلٍّ من الدالتين ر، ع حيث:

أ ر(س) = |س + ٤| ب ع(س) = |س - ٢|

الإزاحة الرأسية (فى اتجاه محور الصادات)

Vertical translation

مثال

(٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كُلٍّ دالة من الدالتين ر، ع:

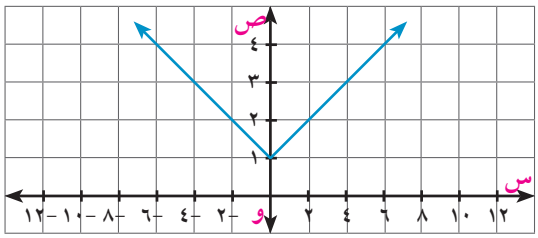
(أ) ر(س) = |س| + ٢ (ب) ع(س) = |س| - ٤

الحل

(أ) هذه الدالة على الصورة:

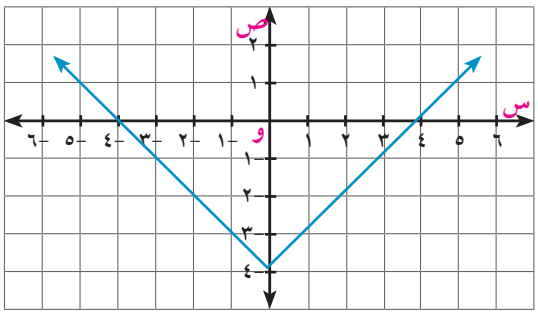
ر(س) = د(س) + ٢

وعليه فإن منحنى ر(س) هو منحنى د(س) بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة إلى أعلى.



(ب) هذه الدالة على الصورة: ع(س) = د(س) – ٤

وعليه فإن منحنى ع(س) هو منحنى د(س) بإزاحة رأسية قدرُها ٤ وحدة إلى أسفل.



حاول أن تحل

(٣) استخدم منحنى الدالة د(س) حيث د(س) = |س| لتمثيلِ كل من الادالتين:

(أ) ر(س) = |س| -٥ (ب) ع (س) = |س| + ٣

الإزاحة الرأسية والإزاحة الأفقية (فى اتجاه محورى الإحداثيات):

مثال

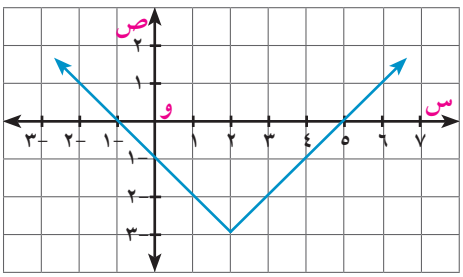
(٤) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

(أ) ر(س) = |س - ٢| - ٣ (ب) ع(س) = |س + ١| - ٢

الحل

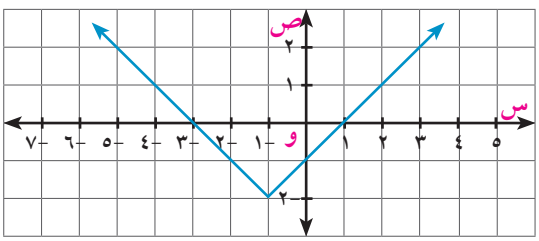
(أ) هذه الدالة على الصورة ر(س) = |س - ٢| - ٣

أى أن منحنى ر(س) هو منحنى د(س) بإزاحة ٢ وحدة أفقية إلى اليمين و ٣ وحداتٍ رأسيةٍ إلى أسفل.



(ب) هذه الدالة على الصورة ع(س) = |س + ١| - ٢

أى أن منحنى ع(س) هو منحنى د(س) بإزاحة وحدة واحدة أفقية إلى اليسار و٢ وحدة رأسيةٍ إلى أسفل.

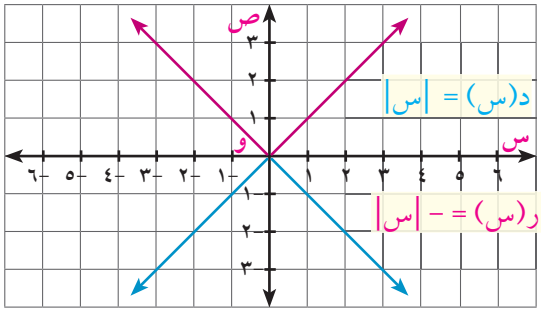


حاول أن تحل

٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كُلٍّ من الدوال ر، ع:

أ ر(س) = |س + ٣| - ١

ب ع(س) = |س - ٢| + ٤



انعكاس دالة المقياس:

منحنى الدالة ر حيث ر(س) = - |س| هو انعكاس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = |س| على محور السينات.

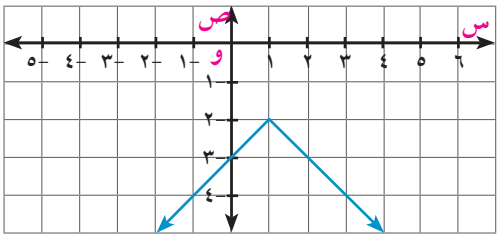
مثال

٥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كُلٍّ دالة من الدوال الآتية

أ ر(س) = - |س - ١| - ٢

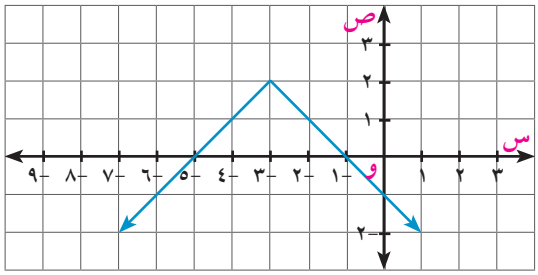
ب ع(س) = ٢ - |س + ٣|

الحل



أ منحنى ر(س) هو انعكاس منحنى د(س) على محور السينات ثم إزاحة وحدة واحدةٍ أفقية إلى اليمين و٢ وحدة رأسيةٍ إلى أسفل.

ملاحظة : يمكن رسم الدالة ر مباشرة وذلك بتعيين نقطة رأس المنحنى (١، -٢) وتحديد النقاط (٠، -٣)، (٢، -٣).



ب منحنى ع(س) هو انعكاس على محور السينات لمنحنى د(س) ثم إزاحة ٣ وحدات أفقيةٍ إلى اليسار و٤ وحداتٍ رأسية إلى أعلى.

حاول أن تحل

٥ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل دالةٍ من الدالتين ر، ع حيث:

أ ر(س) = - |س - ٣| + ١

ب ع(س) = ٢ - |س + ١|

بعض خواص دالة المقياس: *Properties of the modulus function*

سندرس دالة المقياس فى الصورة: د(س) = ك |س - أ| + ب حيث ك ≠ ± ١

ومما سبق يمكن استنتاج الخواص الآتية:

- نقطة رأس المنحنى هى: (أ ، ب).
- معادلة محور التماثل هى: س = أ

تعلم

الدالة التربيعية

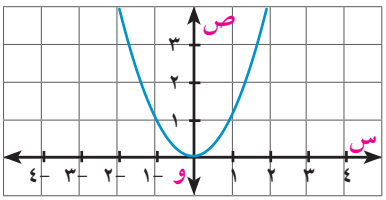
Quadaratic function (Second degree function)

- سندرس الدالة التربيعية التى على الصورة : د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ صفر وسنكتفى فى دراستنا هذا العام بالحالة التى عندها أ = ١ أو أ = -١
- وتمثل بيانيًّا بمنحنى متماثل ، حول مستقيم يوازى محور الصادات و يمر بنقطة رأس المنحنى وهى:

$$\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$$

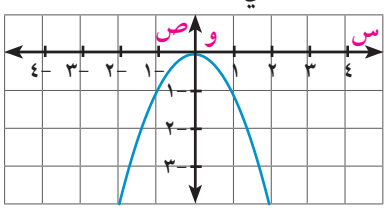
الشكل التالى يمثل أبسط صورة لمنحنى الدالة التربيعية د.

د (س) = س^{٢}



- أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠
- نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٠).
- منحنى الدالة متماثلٌ حول محور الصادات، وبالتالى فإن الدالة زوجيةٌ.
- مدى الدالة = [٠ ، ∞ [
- الدالة تناقصية فى] -∞ ، ٠ [وتزايدية فى] ٠ ، ∞ [

منحنى الدالة د(س) = -س^{٢} هو انعكاس لمنحنى الدالة د (س) = س^{٢} في محور السينات حيثُ:



- أ = -١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠
- نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ٠).
- منحنى الدالة متماثلٌ حول محور الصادات، وبالتالى فإن الدالة زوجيةٌ.
- مدى الدالة =] -∞ ، ٠]
- الدالة تزايدية فى] -∞ ، ٠ [وتناقصية فى] ٠ ، ∞ [

بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة:

Some geometric transformations on the curve of the function

نتبع نفس التحويلات الهندسية السابق دراستها فى دالة المقياس على الدالة التربيعيةِ، وهى د(س ± أ) ، د (س) ± أ ، د (أس)، أ د(س) والأمثلة الآتية توضح ذلك:

مثال

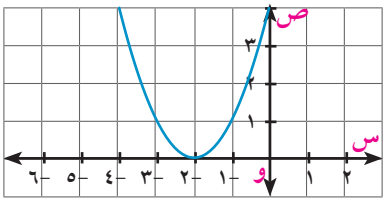
٦ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيلِ كل من الدالتين ر، ع حيث:

أ ر(س) = (س + ٢)^{٢}

ب ع (س) = - (س + ٣)^{٢}

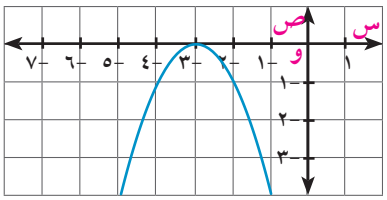
الحل

أ



منحنى ر (س) = (س + ٢)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين في الاتجاهِ السالبِ لمحور السينات.

ب



منحنى ع (س) = -(س + ٣)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بالانعكاس في محور السينات، ثم إزاحته بثلاث وحداتٍ في الاتجاه السالبِ لمحور السينات.

حاول أن تحل

٦ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

أ ر(س) = (س – ٤)^{٢}

ب ع (س) = (س – ٣)^{٢}

إزاحة منحنى الدالة في اتجاه محور الصادات (إزاحة رأسية):

مثال

٧ ارسم منحنى الدالة د حيث :

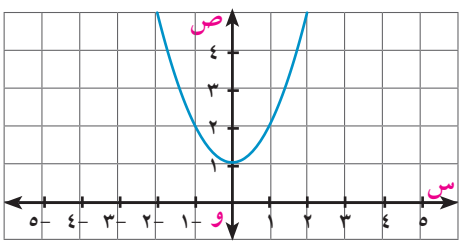
أ د(س) = س^{٢} + ١

ومن الرسم عين المدى.

ب د (س) = - - س^{٢} - $\frac{١}{٢}$

الحل

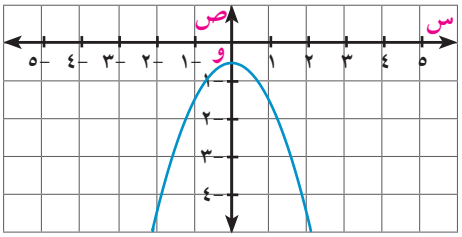
أ



منحنى د(س) = س^{٢} + ١ هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدة واحدةٍ في الاتجاه الموجب لمحورِ الصادات.

المدى = [١، ∞[

ب



منحنى د(س) = - - س^{٢} - $\frac{١}{٢}$ هو منحنى د(س) = س^{٢} بالانعكاس في محور السينات، ثم إزاحته نصف وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

المدى =]-∞ ، - $\frac{١}{٢}$]

حاول أن تحل

(٧) ارسم منحنى الدالة د حيث:

أ د(س) = س^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ ب د (س) = - س^{٢} - $\frac{٣}{٢}$

➢ ومن الرسم عين نقطة رأس المنحنى ومدى الدالة.

إزاحة منحنى الدالة فى اتجاهى محورى الإحداثيات:

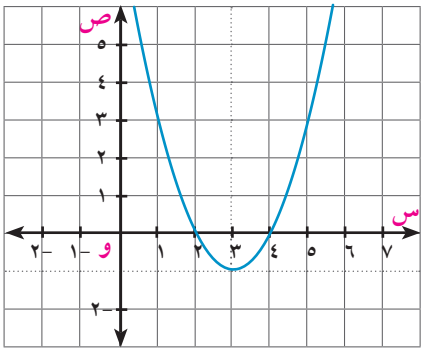
مثال

(٨) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر، ع حيث:

أ ر(س) = (٣ – س)^{٢} – ١ ب ع (س) = س^{٢} + ٤س + ١

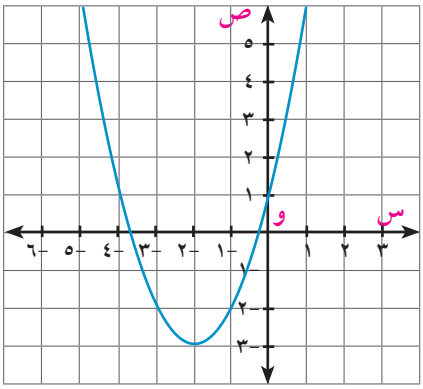
الحل

أ



➢ د (س) = (٣ - س)^{٢} - ١ = (س - ٣)^{٢} - ١ منحنى الدالة ر هو منحنى د (س) = س^{٢} بالإزاحة ثلاث وحداتٍ في الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

ب



∵ د (س) = س^{٢} + ٤س + ١

∴ د (س) = (س^{٢} + ٤س + ٤) - ٣

= (س + ٢)^{٢} - ٣

ومنحنى الدالة ع هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة قدرُها وحدتان في الاتجاه السالب لمحور السينات ثم ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات.

حاول أن تحل

(٨) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لرسم منحنى كل من الدالتين ر، ع حيث.

أ د (س) = (س + ٢)^{٢} – ٤

ب د (س) = ٢ – (س – ٣)^{٢}

➢ ومن الرَّسم عين إحداثى نقطة رأس المنحنى وإحداثيات نقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات وابحث اطراد كل من الدالتين.

تذكر أن

نقطة رأس منحنى الدالة:

ص = ا س^{٢} + ب س + جـ ، ا ≠ ٠

هى $\left(\frac{-ب}{٢ا}\ ،\ د\left(\frac{-ب}{٢ا}\right)\right)$

خواص الدالة التربيعية:

سندرس الدالة التربيعية على الصورة: د(س) = ±(س –أ)^{٢} + ب :

- نقطة رأس المنحنى هى (أ ، ب).
- معادلة محور التماثل هى: س = أ.

دالة الدرجة الثالثة (الدالة التكعيبية)

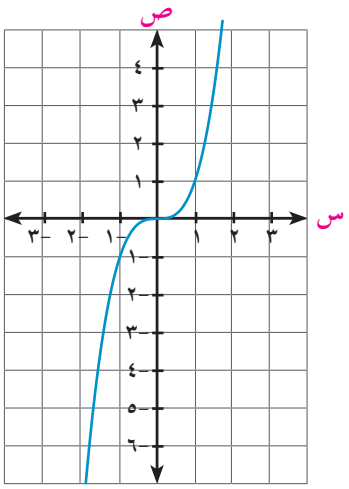
Cubic function (Third degree function)

تعلم

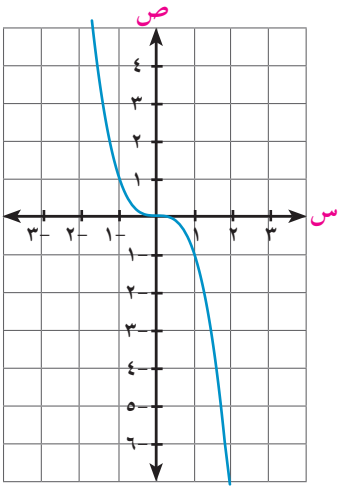
سندرس الدالة التكعيبية بالصورة التالية: د(س) = ± (س - أ) ^{٣} + ب.

أبسط صورة للدالة التكعيبية:

د(س) = س^{٣}



د(س) = - س^{٣}



- منحنى الدالة متماثل بالنسبة لنقطة الأصل، لذلك تكون الدالة فردية.
- مدى الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- الدالة د حيث د (س) = س^{٣} تزايدية على ع بينما د (س) = - س^{٣} تناقصية على ع.
- نقطة تماثل الدالة هى (أ، ب).

بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة:

Some geometric transformations on the curve of the function

- نستخدمُ نفس التحويلات الهندسية التى سبق دراسُتها فى الدالة التربيعية ودالة المقياس.

إزاحة منحنى الدالة فى اتجاه محورى الإحداثيات:

مثال

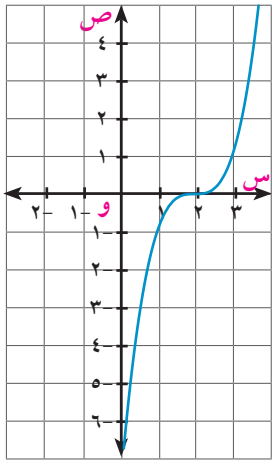
(٩) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} ؛ لتمثيل كل الدالتين ر، ع حيث:

أ ر(س) = (س − ٢)^{٣}

ب ع(س) = س^{٣} − ٣

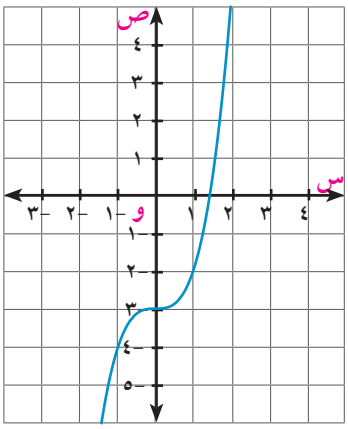
الحل

أ



➤ نقطة التماثل للدالة ر هى (٢ ، ٠).

ب



➤ نقطة التماثل للدالة ع هى (٠ ، -٣).

حاول أن تحل

(٩) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} ؛ لتمثيل كل الدالتين ر، ع حيث:

أ ر(س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)^{٣}

ب ع(س) = ٤ - س^{٣}

مثال

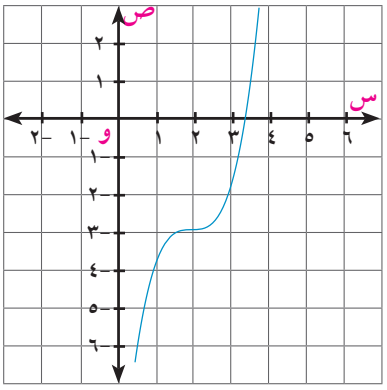
(١٠) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} ، لتمثيل كل من الدوال ر ، ع حيثُ:

أ ر(س) = (س − ٢)^{٣} - ٣

ب ع(س) = (س + ٣)^{٣} - ١

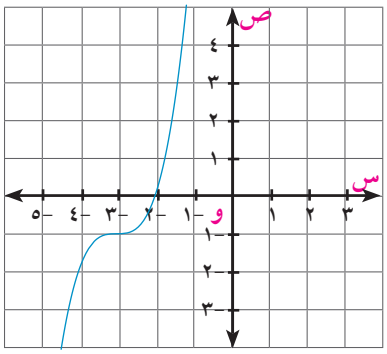
الحل

أ



➤ نقطة التماثل للدالة ر هى (٢ ، -٣).

ب



➤ نقطة التماثل للدالة ع هى (- ٣ ، - $\frac{٣}{٢}$).

حاول أن تحل

(١٠) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيثُ:

أ ر(س) = (س + ٢)^{٣} + ١

ب ع(س) = (س - ٣)^{٣} - ٥

الدالة الكسرية

Rational function

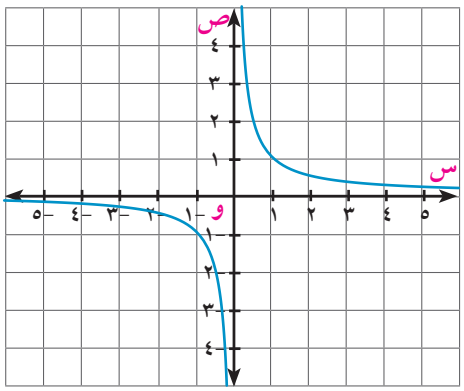
سندرس الدالة الكسرية التى على الصورة د(س) = $\frac{ك}{س-أ}$ + ب حيث ك = ± ١

تعلم

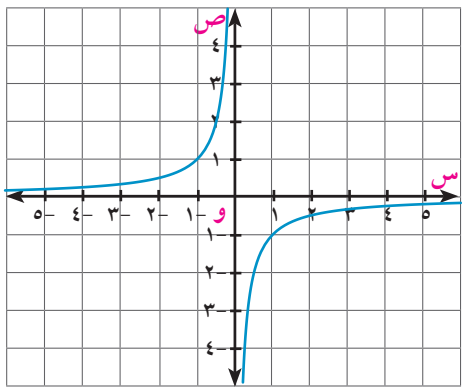
الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠ تُسمى أبسط صورة للدالة الكسرية.

مجال هذه الدالة هو: ح – {٠} والأشكال البيانية التالية تمثل شكل منحنى الدالة.

أ د(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠



ب د(س) = $\frac{-١}{س}$ حيث س ≠ ٠



- منحنى الدالة متماثلٌ بالنسبة لنقطة الأصل لذلك تكون الدالة فرديةً.
- مدى الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر.
- د (س) = $\frac{١}{س}$ تناقصية في الفترة]-∞ ، ٠[ثم تناقصية في الفترة]٠ ، ∞[.
- د(س) = $\frac{-١}{س}$ تزايدية فى الفترة] -∞ ، ٠[ثم تزايدية في الفترة]٠،∞ [
- نقطة تماثل الدالة د(س) = $\frac{١±}{س-أ}$ + ب هى (أ ، ب)

بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة الكسرية:

Some geometric transformation on the curve of the rational function

تخضع التحو يلات الهندسية للدالة الكسرية لنفس الطرق المتبعة فى الدوال السابقة.

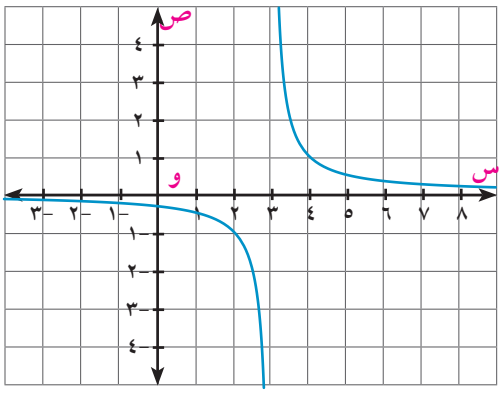
مثال

(١١) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠ لتمثيل كل من:

أ د$_{١}$(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ ب د$_{٢}$(س) = $\frac{١}{س + ٣}$ ج د$_{٣}$(س) = $\frac{١}{س}$ - ٢ د د$_{٤}$(س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣

الحل

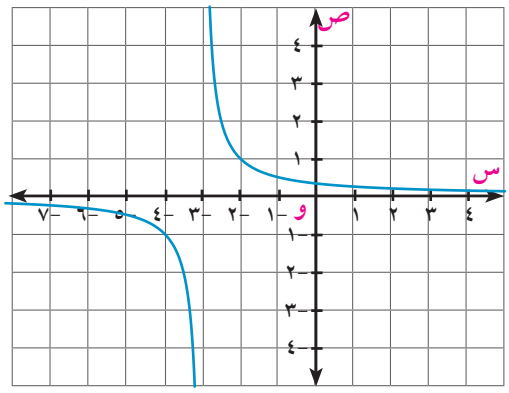
أ



➤ منحنى الدالة د$_{١}$ حيث: د$_{١}$ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ هو منحنى الدالة د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرُها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحورِ السينات.

➤ نقطة التماثل للدالة د$_{١}$ هي: (٣ ، ٠).

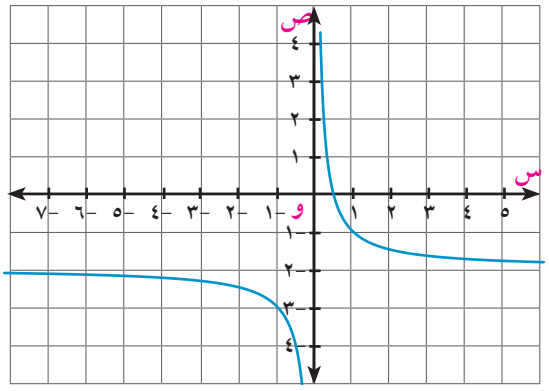
ب



➤ منحنى الدالة د$_{٢}$ حيث د$_{٢}$(س) = $\frac{١}{س + ٣}$ هو منحنى د(س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة مقدارُها ٣ وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات.

➤ نقطة التماثل للدالة د$_{٢}$ هي: (- ٢ ، ٠).

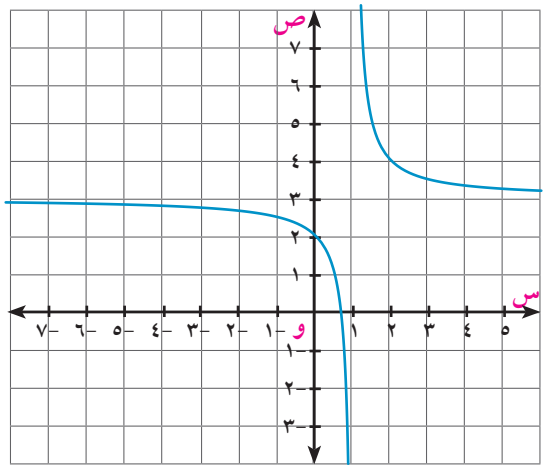
ج



➤ منحنى الدالة د$_{٣}$ حيث: د$_{٣}$(س) = $\frac{١}{س}$ - ٢ هو منحنى د(س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة مقدارُها ٢ وحدة في الاتجاه السالبِ لمحور الصادات.

➤ نقطة التماثل للدالة د$_{٣}$ هي: (٠ ، - ٢).

د



➤ منحنى د$_{٤}$: الدالة د$_{٤}$ (س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣ هو الدالة د (س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه الموجب لمحورِ السينات، ثم إزاحة قدرُها ٣ وحدات في الاتجاه الموجبِ لمحور الصادات.

➤ نقطة التماثل للدالة د$_{٤}$ هي: (١ ، ٣).

نشاط

➢ هل يمكنك تطبيق التحويلات الهندسية التى درستها فى الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟

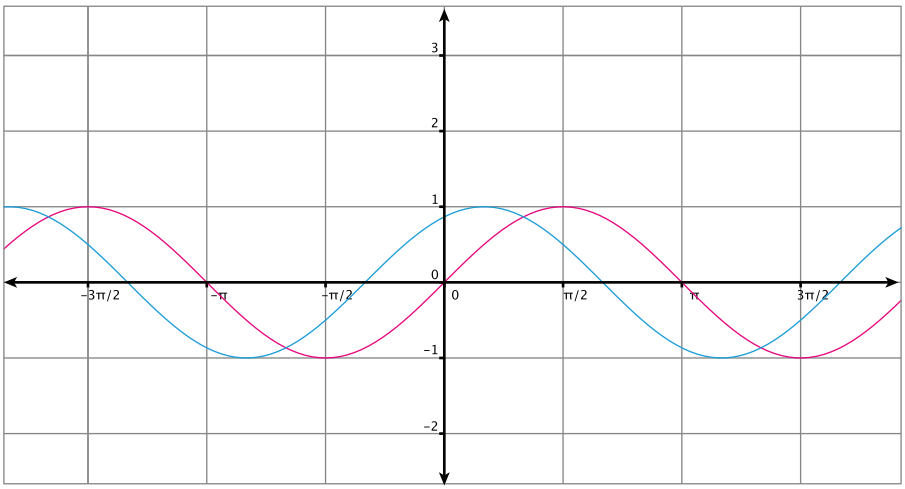
الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب) *Trigometric functions*

أولا: الإزاحة على اتجاه محور السينات

١- استخدم برنامج جيوجبرا (Geo Gebra) وأعد البرنامج بحيث يكون التدريج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين) وتختار منها فى آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x ثم اخترْ منه نظام التدريج (π).

٢- فى أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: sin(x) ثم أضغط (Enter) فتعطى لك شكل المنحنى الأحمر ، تستطيع التحكم فى اللون وسمك المنحنى وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (كليك شمال) فيظهر فى أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط ٠ منقط ، شرطى ، متصل ،...).

٣- بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: sin (x + (π/3)) أى: ص = جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ثم اضغط (Enter) ولوِّنْ هذا المنحنى بلونٍ آخر.



٤- قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن منحنى دالة الجيب قد تمت إزاحته أفقيا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوى $\frac{\pi}{٣}$ ، كما نلاحظ أن مدى الدالة الثانيةهو [- ١ ، ١] وهو نفس مدى الدالة حا س، كما نلاحظ أن الدالة حا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ليست زوجية وليست فردية، لأنه لايوجد تماثل لمنحناها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

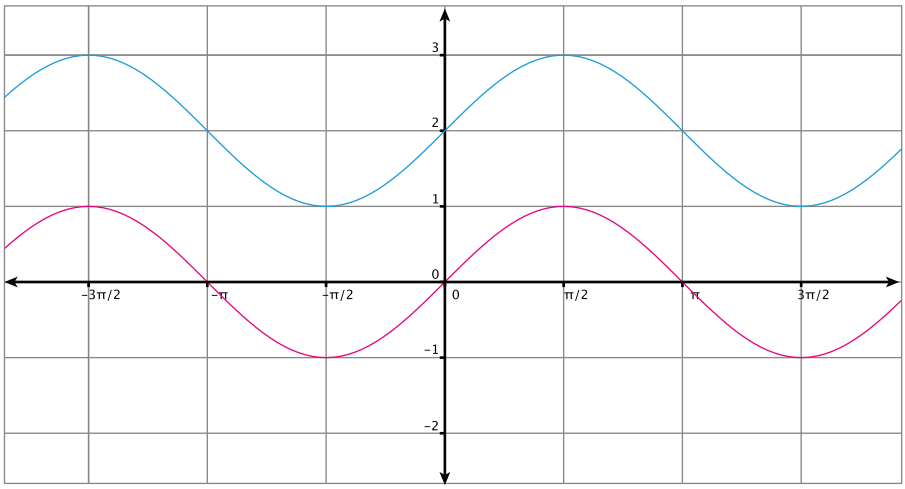
فكر

➢ ماذا تتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هى: جا (س - $\frac{\pi}{٣}$)؟

ثانيا: الإزاحة على محور الصادات

١- ارسم منحنى الدالة ص = جا س كما سبق.

٢- ارسم منحنى الدالة ص = جا س + ٢ بلون آخر وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟



من التمثيل البيانى نجد أن منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة ص = جا(س) ولكن تمت إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.

ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [١ ، ٣] لأنه تم إزاحته بمقدار وحدتين فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات الدالة الأولى، وأن الدالة ص = حا س + ٢ ليست زوجية وليست فردية.

تمـــاريـن الدرس الرابع

أولا: تمارين على دالة الدرجة الأولى ودالة المقياس

(١) اكتبْ معادلةَ الخط المستقيم فى الحالات الآتية ثم مثله بيانيًّا:

أ ميلُه = $\frac{١}{٢}$ ومقطعه الصادى = ٣

ب ميلُه = - $\frac{١}{٣}$ ومقطعه الصادى = $\frac{٥}{٣}$

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س فى لتمثيل مما يأتى بيانيًا:

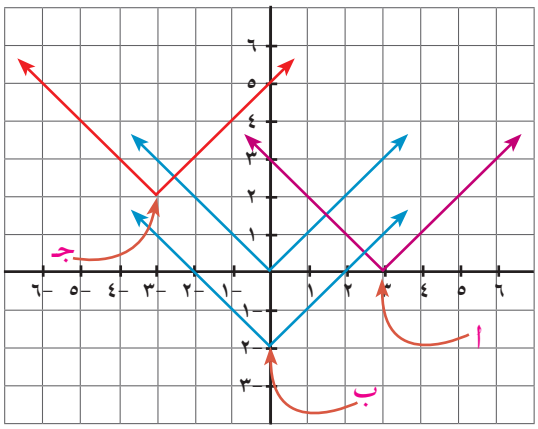
أ د$_١$(س) = س + ٣

ب د$_٢$(س) = ٢ س – ١

ج د$_٣$(س) = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

➢ **ثم أوجد نقاط تقاطع كلٍّ منها مع محورى الإحداثيات س ، ص.**

(٣) رُسِمَ منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| ثم أُزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص كما فى الشكل المقابل.



أ اكتب قاعدة كُلِّ دالة من الدوال التى تمثلها الأشكال الآتية:

➢ الشكل (أ) قاعدة الدالة هى.....

➢ الشكل (ب) قاعدة الدالة هى.....

➢ الشكل (جـ) قاعدة الدالة هى.....

٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتى بيانيًا:

أ $د_1(س) = |س + ٢|$ ب $د_2(س) = |٥ - س|$ ج $د_3(س) = |س + \frac{٣}{٢}|$

د $د_4(س) = |س - ٧|$ هـ $د_5(س) = |س| + ١$ و $د_6(س) = |س| - ٣$

ز $د_7(س) = |س + ٢| + ١$ ح $د_8(س) = |س - ٣| - ٢$ ط $د_9(س) = |س + ١| - ٢$

➢ **ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع كل من هذه الدوال مع المحورين.**

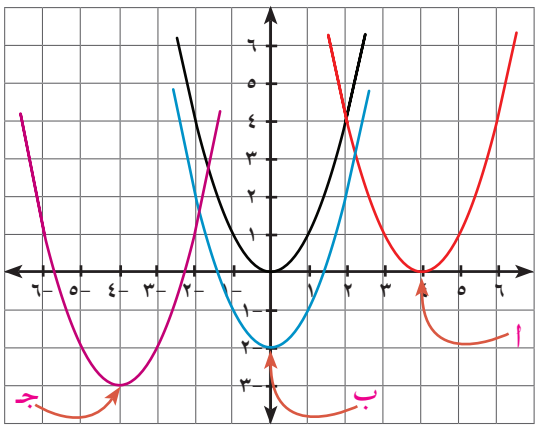
٥ **الربط بالإنتاج:** تعمل منشأة ما فى سوق العمل ولديها تكلفةٌ متغيرةٌ مقدارُها ٣٥٠ جنيهًا عن كل وحدة وتكلفة ثابتة مقدارُها ٤٥٠٠ جنيه ، فإذا كانت ن ترمز إلى عدد الوحدات المنتجة ، جـ للتكلفة الكلية.

أ عبر عن هذه البيانات بدالة خطية.

ب أوجد التكلفةَ الكليةَ بالجنيه إذا كان عدد الوحدات المنتجة ١٥٠ وحدة.

ثانيا: تمارين على دالة الدرجة الثانية

٦ رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^2$ ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص كما فى الشكل التالى.



أ اكتب قاعدة كل دالة من الدوال التى تمثلها الأشكال الآتية:

➢ الشكل (أ) قاعدة الدالة هى.....

➢ الشكل (ب) قاعدة الدالة هى.....

➢ الشكل (جـ) قاعدة الدالة هى.....

(٧) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل مايأتى بيانيًّا.

أ د$_{١}$(س) = (س – ٣)^{٢} ب د$_{٢}$(س) = (س + ١)^{٢}

جـ د$_{٣}$(س) = س^{٢} – ٤ د د$_{٤}$(س) = س^{٢} + ١

➤ ومن الرسم عين نقطة رأس منحنى الدالة المحولة وعين مدى كل منها.

(٨) استخدم منحنى الدالة حيث د (س) = س^{٢} لتمثيل مايأتى بيانيًّا:

أ د$_{١}$(س) = (س – ١)^{٢} – ٢ ب د$_{٢}$(س) = ٢ – (س + ٣)^{٢}

جـ د$_{٣}$(س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)^{٢} - $\frac{١}{٢}$ د د$_{٤}$(س) = $\frac{٣}{٤}$ - (س + $\frac{٧}{٤}$)^{٢}

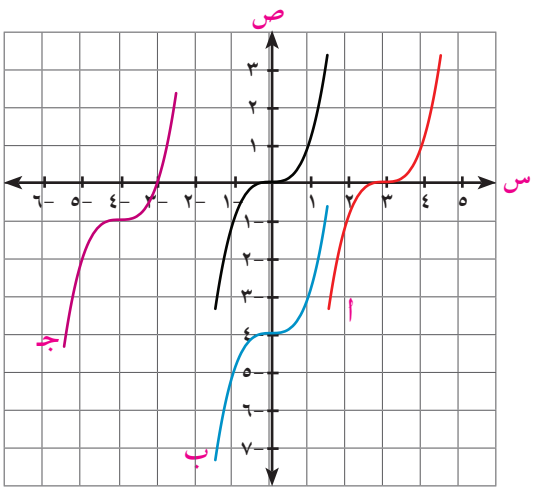
➤ ومن الرسم عين نقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات.

(٩) إذا كانت د: [- ٤ ، ٤] ⟵ ح حيث د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & \text{عندما } -٤ \leqslant \text{س} < ٠ \\ -\text{س}^{٢} - ١ & \text{عندما } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$

➤ ارسم **منحنى الدالة د** وأوجد مداها، وابحث إطرادها وعين نوعَها من حيث كونها زوجيةً أو فرديةً أو غير ذلك.

ثالثا: تمارين على دالة الدرجة الثالثة

(١٠) فى الشكل التالى: رُسِمَ منحنى الدالة د حيثُ د(س) = س^{٣} ثم أُزيح فى أتجاه محورى الإحداثيات س ، ص



أ اكتبْ قاعدةَ كلِّ دالةٍ من الدوال التى تمثلها الأشكال الآتية:

➤ الشكل (أ) قاعدة الدالة هى.....

➤ الشكل (ب) قاعدة الدالة هى.....

➤ الشكل (جـ) قاعدة الدالة هى.....

(١١) ارسم الشكل البيانى لما يأتى، ومن الرسم أوجد المدى وابحثْ الإطراد وعين نوع الدالة من حيث كونها زوجيةً أو فرديةً أو غير ذلك:

أ) $د_١(س) = \begin{cases} س^٣ & \text{عندما } س < -١ \\ -١ & \text{عندما } س \leqslant -١ \end{cases}$

ب) $د_٢(س) = \begin{cases} س^٣ & \text{عندما } س > ٠ \\ |س| & \text{عندما } س \leqslant ٠ \end{cases}$

ج) $د_٣(س) = |س^٣| + ١$

د) $د_٤(س) = |س^٣ + ١|$

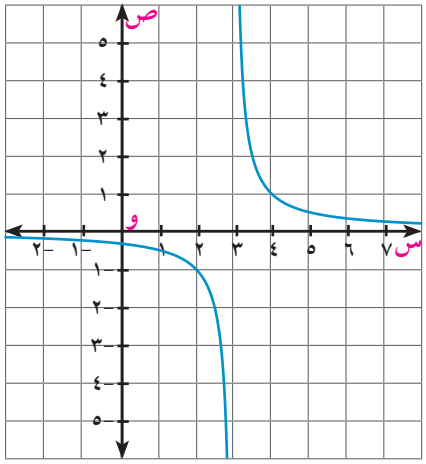
هـ) $د_٥(س) = س|س|$

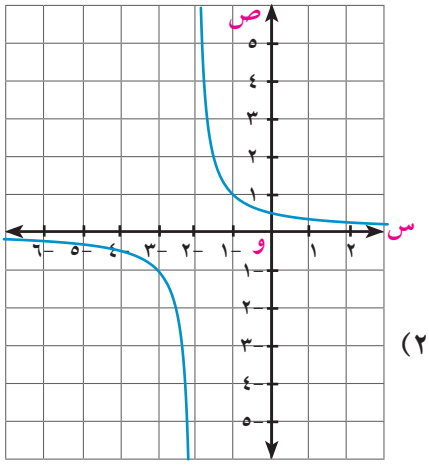
و) $د_٦(س) = \frac{س^٤}{|س|} - ١$

رابعا: تمارين على الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$

(١٢) ارسم منحنى الدالةِ د حيثُ $د(س) = \frac{١}{س}$ ثم أزيح فى اتجاهِى محورى الإحداثيات س ، ص كما فى الشكل المقابل. اكتب قاعدة كل دالةٍ ممثلة بالأشكال الآتية:

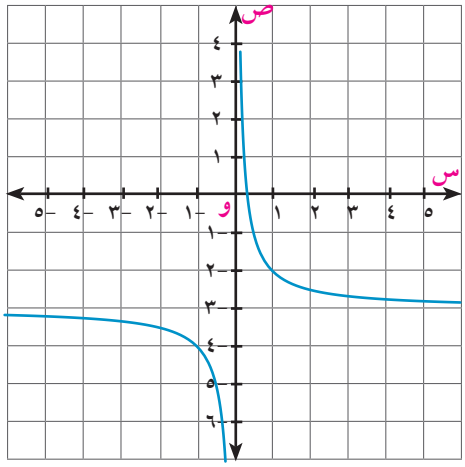
شكل (١)

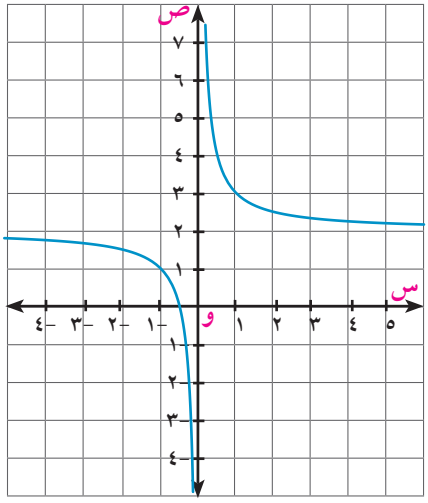




شكل (٢)

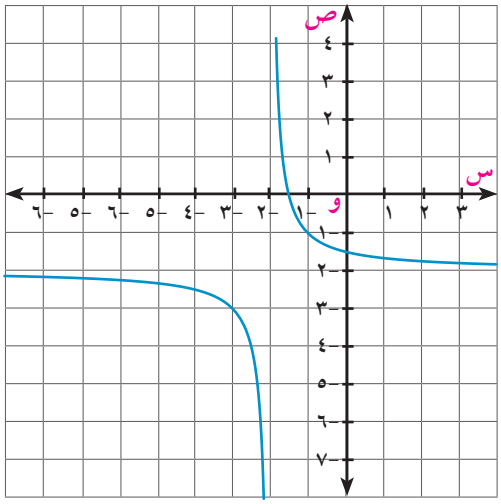
شكل (٣)



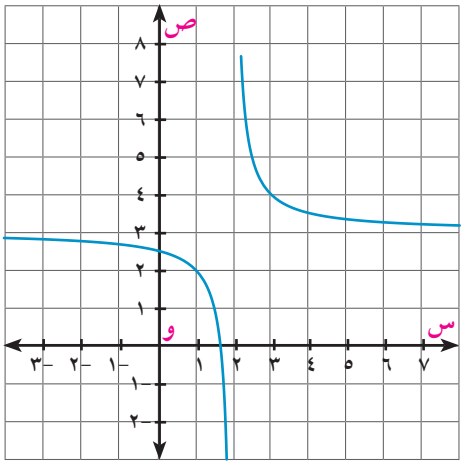


شكل (٤)

شكل (٥)



شكل (٦)



(١٣) إذا كانت الدالة د حيثُ د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق فى الحالاتِ الآتية، ثم أوجد إحداثيي نقطةِ التماثل لكل دالةٍ:

أ ق(س) = د(س)

ب ق(س) = د(س + ١)

ج ق(س) = د(س – ٣)

د ق(س) = د(س) + ٢

هـ ق(س) = د(س) - ٤

و ق(س) = د(س + ٢) - ٥

ز ق(س) = د(س - ٢) + ٢

(١٤) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكلَ البيانى للدالة ل فى الحالاتِ الآتيةِ:

أ ل(س) = |د(س)|

ب ل(س) = ٢ + |د(س)|

ج ل(س) = |د(س - ٢)|

د ل(س) = ٢ – |د(س + ١)|

(١٥) يتقاضى سباك ٤٠٠ جنيه لفحص أى منزل، بالإضافة إلى ٢٠٠ جنيه عن كل ساعة عمل إضافية . عبر عن تكلفة السباك (ت) كدالة لعدد ساعات العمل (ن) المطلوبة، ثم احسب التكلفة الكلية إذا عمل لمدة ٦ ساعاتٍ.

(١٦) يتقاضى فنان ما من شركة أقراص مدمجة ٧٠٠٠٠ جنيه كرسوم إضافية إلى ٣ جنيهات عن كل قرص مدمج مباع . عبر عن إيراداته (ر) كدالةٍ فى عدد الأسطوانات (ن) ثم احسب إجمالى إيراداته، إذا كانت عدد الأقراص المباعة ١٥٠٠ قرصٍ.

(١٧) قدرت أرباح شركة الأحذية لكل وحدة مباعة (س) بالعلاقة : ر(س) = -س^{٢} + ٣٠٠ س - ٩٠٠٠

أ ارسم منحنى الدالة.

ب عين إحداثيات القيمة العُظمى للمنحنى.

ج أوجد من الرسم عدد الوحدات المباعة والتى تجعل الربح فى أكبر قيمة له وأكبر قيمة للربح عندئذ.

المعادلات والمتباينات

Equations and Inequalities

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بيانيًّا
- حل معادلات المقياس جبريا
- حل متباينات المقياس جبريا

المصطلحات الأساسية

معادلة	*Equation*
متباينة	*Inequality*
حل بياني	*Graphical solution*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة رسومية
- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

فكر و ناقش

أولًا: حل المعادلات

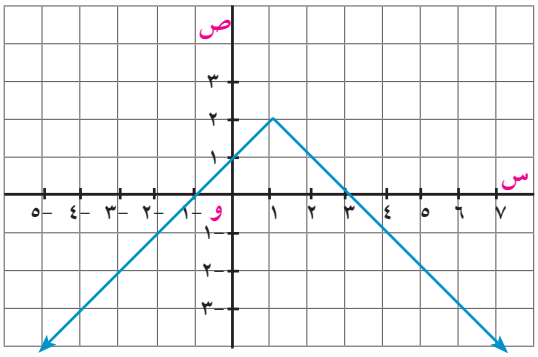
سبق أن درست حل المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى، ومن الدرجة الثانية فى متغير واحد وفى متغيرين جبريا وبيانيا، فهل يمكنك حل المعادلة الآتية؟

إذا كانت د معرفة كالآتى:

$$د(س) = \begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } س < ١ \\ ١ + س & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$$

فأوجد قيم س التى تجعل د(س) = ٠

الشكل البيانى المرسوم يمثل شعاعان يمر أحدهما بالنقطة (- ١ ، ٠)والآخر يمر بالنقطة (٣ ، ٠).



ومن الشكل المرسوم عندما د(س) = ٠ فإن:

س = - ١ أ، س = ٣

ويمكن التحقق من ذلك جبريا كالآتى:

عندما: س < ١ فإن: ٣ – س = ٠ أى أن س = ٣

تحقق الفترة المعطاة لأن ٣ ∋]١ ، ∞ [

عندما: س ⩾ ١ فإن: ١ + س = ٠ أي أن س = - ١

تحقق الفترة المعطاة لأن -١ ∋] - ∞ ، - ١]

أى أن مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هى: { – ١ ، ٣ }

حل المعادلة: |أ س – ب| = جـ

مثال

(١) حل المعادلة:

أ |س - ٣| = ٥ بيانيًّا وجبريًّا.

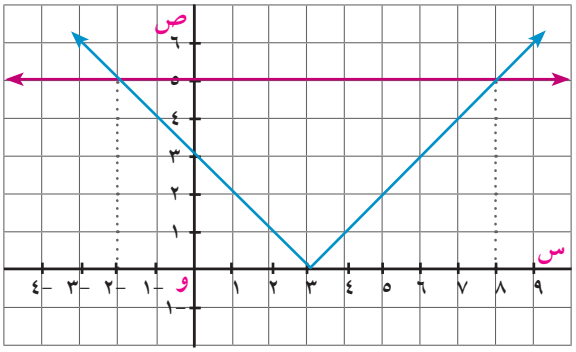
تذكر أن

د(س) = ق (س) هو مجموعة تحوى على الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين د، ق

الحل

بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٥

$$د(س) = \begin{cases} س - ٣ & \text{عندما } س \geq ٣ \\ -س + ٣ & \text{عندما } س < ٣ \end{cases}$$



ر(س) = ٥ دالة ثابتة تمثل بمستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ٥) نرسم الدالتين د ، ر فى شكل واحد حيث إن:

د(س) = ر(س).

نعين نقاط التقاطع للتمثيل البيانى للدالتين د ، ر فتكون الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع هى مجموعة الحل أى أن مجموعة حل المعادلة هى:

{- ٢ ، ٨}

الحل الجبرى: *Algebraic solution*

عندما س < ٣ : س - ٣ = ٥ أى أن: س = ٨ ∋]٣ ، ∞[

عندما س ⩾ ٣ : - س + ٣ = ٥ أى أن: س = - ٢ ∋]- ∞ ، ٣[

مجموعة حل المعادلة هى: { - ٢ ، ٨} وهذا يطابق الحل البيانى.

حاول أن تحل

(١) حل كلا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ |س| - ٤ = ٠ ب |س| + ١ = ٠ ج |٢س - ٧| = ٥

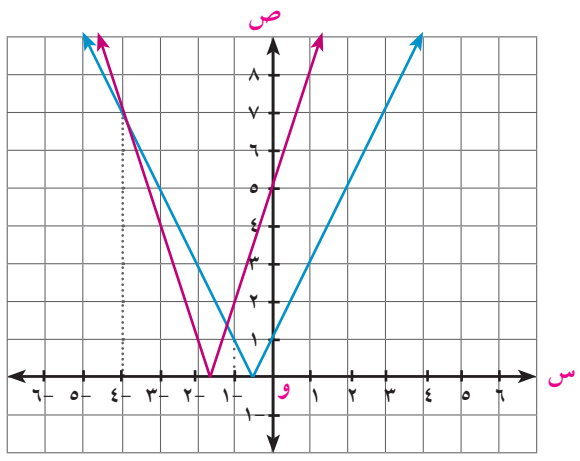
حل المعادلة: |أ س + ب| = |جـ س + ء|

مثال

(٢) حل المعادلة: |٣س + ٥| = |٢س + ١| بيانيًّا.

الحل

الدالة د حيث د(س) = |٣س + ٥| يمثلها بيانيًّا شعاعان مبدؤهما النقطة (- $\frac{٥}{٣}$ ، ٠) ، أحدهما يمر بالنقطة (٠ ، ٥) والآخر يمر بالنقطة (- ٤ ، ٧).



نرسم منحنى الدالة ر حيث
ر(س) = |٢س + ١| وهذه يمثلها شعاعان مبدؤهما النقطة (- $\frac{١}{٢}$ ، ٠) ويمر أحدهما بالنقطة (٢ ، ٥) والآخر يمر بالنقطة (- ٤ ، ٧)
نعين نقط تقاطع الدالتين د ، ر فتكون الإحداثيات السينية لنقط التقاطع هى مجموعة الحل.
من الرسم نجد أن نقط تقاطع الدالتين د ، ر هما (- ١,٢ ، ١,٤) ، (- ٤ ، ٧)
لذلك فإن مجموعة الحل هى {- ١,٢ ، - ٤}.

حاول أن تحل

(٢) حل المعادلة الآتية بيانيًا |٣س + ٧| = |٢س + ٣|

خواص المقياس

Properties of the absolute value function

تعلم

علمت أن مقياس العدد الحقيقى س يرمز له بالرمز |س| وهو عدد حقيقى يساوى س إذا كانت س غير سالبة ويساوى (– س) إذا كانت س سالبة. وفيما يلى بعض خصائص المقياس.

(١) |أ| ≥ ٠ أى أن مقياس العدد الحقيقى هو عدد حقيقى غير سالب.
ونلاحظ أن: |أ| = ٠ إذا وفقط إذا كان أ = ٠

(٢) |أ ب| = |أ| × |ب| فمثلا:
|٢ × - ٣| = |- ٦| = ٦ ، |٢| × |- ٣| = ٢ × ٣ = ٦

(٣) |أ + ب| ≤ |أ| + |ب|
ويحدث التساوى فقط إذا كان العددان أ ، ب لهما نفس الإشاره فمثلا:
|٤ + ٥| = |٤| + |٥| = ٩ ،
|- ٤ - ٥| = |- ٤| + |- ٥| = ٩

لاحظ أن

$\sqrt{س^{٢}}$ = |س| ،
$\sqrt{(س \pm أ)^{٢}}$ = |س ± أ|

مثال

(٣) أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(أ) |٢س + ٣| = ٧
(ب) |٢ – ٣س| = ٥
(جـ) |س + ٧| = |س – ٥|
(د) $\sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩}$ = ٥

(أ) الحل باستخدام إعادة تعريف دالة المقياس:
أولًا: ٢س + ٣ = ٧ عندما س ≤ - $\frac{٣}{٢}$
بإضافة (–٣) إلى طرفى المعادلة ٢س + ٣ - ٣ = ٧ - ٣
بالتبسيط ٢س = ٤
بقسمة الطرفين على ٢ س = ٢ ∈]-∞، - $\frac{٣}{٢}$]

ثانيًا: -(٢س + ٣) = ٧ عندما س < $-\frac{٣}{٢}$

بإضافة (−٣) إلى طرفى المعادلة ∴ ٢س + ٣ = -٧

بالتبسيط ٢س + ٣ - ٣ = -٧ - ٣

بالقسمة على ٢ ٢س = -١٠

س = -٥ ∋]-∞، $-\frac{٣}{٢}$[

∴ مجموعة حل المعادلة = {-٥، ٢}

حل آخر

∵ |٢س + ٣| = ٧

∴ ٢س + ٣ = ٧ أو ٢س + ٣ = ٧±

∴ ٢س = ٧ - ٣ ٢س + ٣ = -٧

∴ ٢س = ٤ ٢س = -٧ - ٣

∴ س = ٢ ٢س = -١٠

س = -٥

مجموعة حل المعادلة هى {-٥، ٢}

ب **لاحظ أن:** |٢ - ٣س| = |-(٣س - ٢)|

|-(٣س - ٢)| = |-١| × |٣س - ٢|

أى أن: |٢ - ٣س| = |٣س - ٢|

لذلك تصبح المعادلة كالآتى : |٣س - ٢| = ٥

∵ |٣س - ٢| = ٥ ∴ ٣س - ٢ = ٥±

٣س - ٢ = ٥ أو ٣س - ٢ = -٥

٣س = ٧ ٣س = -٣

بالقسمة على ٣ ∴ س = $\frac{٧}{٣}$ بالقسمة على ٣ ∴ س = -١

مجموعة الحل = {-١، $\frac{٧}{٣}$}

ج ∵ |س + ٧| = |س − ٥|

∴ س + ٧ = ± (س − ٥)

∴ س + ٧ = س − ٥ ولكن ٧ ≠ -٥ (الحل مرفوض).

أو س + ٧ = -س + ٥ **أى أن:** ٢س = -٢

∴ س = -١ **أى أن** مجموعة حل المعادلة هو {-١}

التحقيق:

بالتعويض عن س = -١ فى طرفى المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦ أى أن مجموعة الحل هو {-١}

لاحظ أن

إذا كان |س| = أ حيث أ > ٠

فإن: س = ± أ

لاحظ أن

إذا كان أ > ٠

فإن:

|أ - س| = |س - أ|

لاحظ أن

إذا كان أ، ب ∋ ح

وكان |أ| = |ب|

فإن: أ = ± ب

حل آخر:

بتربيع طرفى المعادلة $|س + ٧|^{٢} = |س - ٥|^{٢}$

$س^{٢} + ١٤ س + ٤٩ = س^{٢} - ١٠س + ٢٥$

بالتبسيط $١٤س + ١٠س = ٢٥ - ٤٩$ **أى أن** $٢٤س = -٢٤$

بالقسمة على ٢٤ $س = -١$

ومن الضرورى التعويض فى طرفى المعادلة عن قيم س الناتجة عندما س = -١

الطرف الأيمن = $|-١ + ٧| = ٦$، الطرف الأيسر = $|-١ - ٥| = ٦$

مجموعة حل المعادلة هو {-١}

تذكر أن

$\sqrt{س^{٢}} = |س|$

د **لاحظ أن:** $\sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩} = \sqrt{(س + ٣)^{٢}} = |س + ٣|$

$\because |س + ٣| = ٥$ $\therefore س + ٣ = \pm ٥$

$س + ٣ = ٥$ $س + ٣ = -٥$

$س = ٢$ $س = -٨$

مجموعة الحل = {-٨، ٢}

فكر: هل يمكنك حل المسألة عن طريق تربيع الطرفين والتحقق من صحة نواتج الحل؟ وضِّحْ ذلك.

حاول أن تحل

(٣) أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ $|٢س - ٧| = ٩$ ب $|٤ - \frac{١}{٢}س| = ٥$

جـ $|س + ٥| = |س - ٣|$ د $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩} = ٧$

تذكر أن

لكل من أ، ب، جـ

إذا كان: أ > ب ، ب > جـ فإن أ > جـ

إذا كان: أ > ب فإن:

أ + جـ > ب + جـ

إذا كان أ > ب فإن:

- أ جـ > ب جـ عندما تكون جـ > ٠
- أ جـ < ب جـ عندما تكون جـ < ٠

إذا كان أ ، ب موجبتين ،

أ > ب فإن $\frac{١}{أ} < \frac{١}{ب}$

ثانيا: حل المتباينات

سبق أن درست المتباينات وعلمت أن المتباينة هى عبارة رياضية تحتوى على أحد الرموز: (< أ ، > أ ، ≤ أ ، ≥ أ) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم التى تجعل المتباينة صحيحة.

خواص التباين *Properties of inequality*

تعلم

١- إذا كان أ > ٠ فإن:

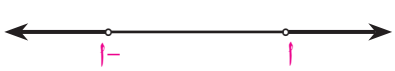
- بفرض أن $|س| < أ$ فإن: $-أ < س < أ$



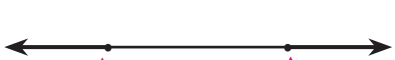
- إذا كان $|س| \leq أ$ فإن: $-أ \leq س \leq أ$



- إذا كان $|س| > أ$ فإن: س > أ أ، س < -أ



- إذا كان $|س| \geq أ$ فإن: س ≥ أ أ، س ≤ -أ



مثال

٤ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س| > ٢ ب |س| ≥ $\sqrt{٣}$ ج |س| < ٥ د |س| ≤ $\frac{٣}{٢}$

الحل

أ ∵ |س| > ٢ ∴ - ٢ > س > ٢ أى: س ∈] - ٢ ، ٢ [

ب ∵ |س| ≥ $\sqrt{٣}$ ∴ - $\sqrt{٣}$ ≥ س ≥ $\sqrt{٣}$ أى: س ∈ [- $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$]

ج ∵ |س| < ٥ ∴ س < ٥ أ، س > - ٥ أى: س ∈ ح - [- ٥ ، ٥]

د ∵ |س| ≤ $\frac{٣}{٢}$ ∴ س ≤ $\frac{٣}{٢}$ أ، س ≥ - $\frac{٣}{٢}$ أى: س ∈ ح - [- $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

حاول أن تحل

٤ أوجد مجموعة حل كُلٍّ من المتباينات الآتية:

أ |س| > $\frac{١}{٢}$ ب | $\frac{س}{٢}$ | ≥ $\frac{٥}{٢}$ ج |س| < $\sqrt{٧}$ د |$\frac{١}{٣}$ س| ≤ ٢

تفكير ناقد:

٥ إذا كانت أ > ٠ ، ب > ٠ اكتب مجموعة حل كل من المتباينات الآتية (مستخدمًا خواص التباين).

أ |س - ب| > أ ب |س - ب| ≥ أ ج |س - ب| < أ د |س - ب| ≤ أ

مثال

٥ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كُلٍّ من المتباينات الآتية:

أ |س - ٣| < ٤ ب $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$ ≤ ٤

الحل

أ ∵ |س - ٣| < ٤ أى - ٤ < س - ٣ < ٤ وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ - ٤ + ٣ < س - ٣ + ٣ < ٤ + ٣ وبالتبسيط

- ١ < س < ٧ أى أن س ∈] - ١ ، ٧ [

∴ مجموعة الحل =] - ١ ، ٧ [

ب ∵ $\sqrt{(س - ١)^٢}$ = |س - ١| أى أن: |س - ١| ≤ ٤

∴ س - ١ ≤ ٤ أى س ≤ ٥ أ، س - ١ ≥ - ٤ أى س ≥ - ٣

∴ مجموعة حل المتباينة هى] - ∞ ، - ٣] ∪ [٥ ، ∞ [

أى أن: س ∈ ح -] - ٣ ، ٥ [

٩ حاول أن تحل

(٦) أوجد على صورة فترة مجموعة حل كُلٍّ من المتباينات الآتية:

أ) |س - ٧| > ١١ ب) |٣س + ٧| ≥ ٨

تمارين الدرس الخامس

أكمل مايأتى:

(١) مجموعة حل المعادلة |س| = $\frac{١}{٢}$ هى

(٢) مجموعة حل المعادلة |س| + ٣ = ٠ هى

(٣) مجموعة حل المتباينة |س - ٢| ≥ ٠ هى

أوجد جبريًا مجموعة الحل لكلٍّ من المعادلات الآتية:

(٤) |س - ٢| = ٣ (٥) |٣ - ٢س| = ٧

(٦) $س^{٢}$ + |س| = ٢ (٧) س |س - ٢| + ٣ = ٠

(٨) $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ = ٩

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكلٍّ من المعادلات الآتية:

(٩) |٢س - ٣| = ٧ (١٠) |س + ٢| = |س - ٣|

(١١) $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$ = ٣

أوجد مجموعة الحل لكُلٍّ من المتباينات الآتية:

(١٢) |س - ١| > ٢ (١٣) |س - ٢| < ٣

(١٤) |٢س - ٥| < ٣ (١٥) |٢س - ٣| > ٧

(١٦) |٢س + ٣| ≥ ٧ (١٧) |٢س - ٥| < ١

(١٨) |٢س + ٧| ≥ ١٥ (١٩) |٣س - ٢| < ٤

(٢٠) |٣س - ٧| ≤ ٢

ملخص الوحدة

١ **الدالة:** هى علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سـ ، صـ، بحيث يكون لكل عنصر من عناصر المجموعة سـ صورة واحدة فقط من عناصر صـ وتكتب رمزيا بالصورة د: سـ ⟵ صـ، وتتحدد الدالة بثلاثة عناصر هى المجال، المجال المقابل، قاعدة الدالة.

٢ **اختبار الخط الرأسى:** إذا مُثِلتْ مجموعةٌ من النقاط فى مستوى إحداثى متعامد وقطع الخطُّ الرأسي عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيلها البيانى فى نقطة وحيدة فإنه مجموعةهذه النقاط تكون دالة.

٣ **الدالة الزوجية والدالة الفردية:**

الدالة الزوجية: يقال للدالة د إنها زوجيةٌ إذا كان د(-س) = د(س) لكل س ، -س ∈ المجال.

الدالة الفردية: يقال للدالة د إنها فرديةٌ إذا كان د(-س) = -د(س) لكل س ، -س ∈ المجال.

٤ **إطراد الدوال:** تكون الدالة تزايدية فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈]أ ، ب[، $س_٢ > س_١$ فإن $د(س_٢) > د(س_١)$:

وتكون الدالة تناقصية فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈]أ ، ب[، $س_٢ > س_١$ فإن $د(س_٢) < د(س_١)$

وتكون الدالة ثابتة فى الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل $س_١$، $س_٢$ ∈]أ ، ب[، $س_١ > س_٢$ فإن $د(س_٢) = د(س_١)$

٥ **الدالة الخطية:** هى دالة تقع جميع نقاطها على خط مستقيم وتكتب بالصورة: د(س) = أ س + ب ، أ ≠ ٠ حيث أ هو ميل الخط المستقيم، ب طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

٦ **دالة المقياس:**

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س| ، وتعرف على النحو التالى: $د(س) = \begin{cases} س ، & س \geq ٠ \\ -س ، & س < ٠ \end{cases}$

وتكتب دالة المقياس على الصورة: د(س) = ك |س- أ| + ب حيث ك ≠ ٠ ومن خواصها:

نقطة رأس المنحنى هى (أ ، ب).

معادلة محور التماثل هى س = أ

- إذا كانت |ك| > ١ فإن الرسم يكون أضيق من رسم الدالة د حيث د(س) = |س|،
- و إذا كانت ٠ < ك < ١ فإن الرسم يكون أوسع من رسم الدالة د حيث د(س) = |س|

يمكن إزاحة دالة المقياس إزاحة أفقية فقط أو إزاحة رأسية فقط أو إزاحة أفقية ورأسية معًا.

٧ **الدالة التربيعية:** تكتبُ الدالةُ التربيعيةُ على الصورة: د(س) = ك (س - أ)^٢ + ب حيث ك ≠ ٠ :

- نقطة رأس المنحنى هى (أ ، ب).
- معادلة محور التماثل هى: س = أ

- إذا كانت ك > ١ فإن الرسم يكون أضيق من رسم الدالة د حيث د(س) = س^{٢} ، و إذا كانت ٠ < ك < ١ فإن الرسم يكون أوسع من رسم الدالة د حيث د(س) = س^{٢}
- أبسطُ صورةٍ للدالة التربيعية هى د(س) = س^{٢} و يمكن إزاحة منحنى الدالة إزاحة أفقية فقط أو إزاحة رأسية فقط أو إزاحة أفقية ورأسية معا.

٩ **الدالة التكعيبية:** تكتب الدالة التكعيبية على الصورة: د(س) = ك (س - أ)^{٣} + ب حيث ك ≠ ٠:

- نقطة التماثل هى (أ ، ب).
- أبسطُ صورةٍ للدالة التكعيبية هى د(س) = س^{٣} و يمكن إزاحة منحنى الدالة إزاحة أفقية فقط أو إزاحة رأسية فقط أو إزاحة أفقية ورأسية معا.

١٠ **الدالة الكسرية:**

تُكتبُ الدالةُ على الصورة: د(س) = $\frac{ك}{س-أ}$ + ب ، ك ≠ ٠ ، س ≠ أ حيثُ:

نقطة تماثل الدالة هى (أ ، ب).

- أبسطُ صورةٍ للدالة هى د(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠ و يمكن إزاحة منحنى الدالة إزاحة أفقية فقط أو إزاحة رأسية فقط أو إزاحة أفقية ورأسية معًا.

٩ **التحويلات الهندسية:** للدالة د حيث ص = د(س) ، أ > ٠ تحدد بالآتى:

إذا كانت ص = د(س) + أ فإنها تمثل بإزاحة منحنى د بمقدار أ فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات

إذا كانت ص = د(س - أ) فإنها بإزاحة منحنى د بمقدار أ فى الاتجاه السالب لمحور السينات.

١٠ **المعادلة:** هى جملة رياضية تحتوى على عبارتين جديتين، يفصل بينهما بالإشارة (=) وعادة ما تحتوى المعادلة على مجهول أو أكثر يُطلق عليها بالمتغيرات.

طرق حل معادلات المقياس:

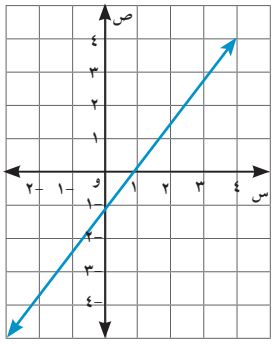
الحل البيانى - الحل الجبرى (إعادة تعريف دالة المقياس - تربيع طرفى المعادلة)

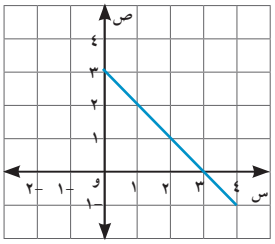
١١ **المتباينة:** هى عبارة رياضية تحتوى أحد الرموز (< ، > ، ≥ ، ≤)

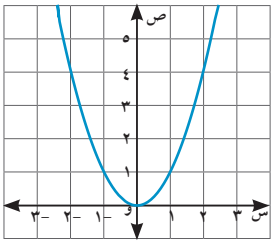
وحل المتباينة يعنى إيجاد مجموعة قيم المتغير التى تجعل المتباينة صحيحةً

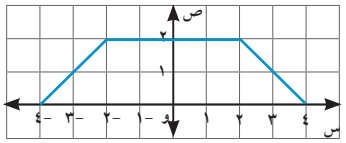
تمـــارين عامة

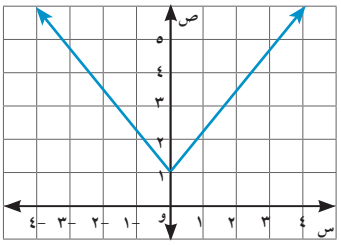
١ فى الأشكال البيانية الآتية أوجد مدى الدالة وابحث اطراد كل منها:

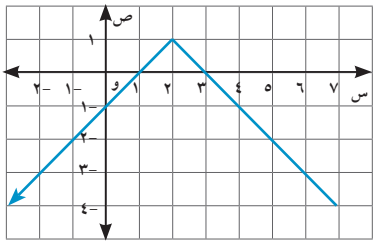
أ 

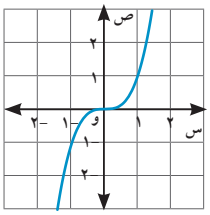
ب 

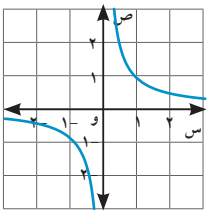
ج 

د 

هـ 

و 

ز 

ح 

٢ أوجد مجال كُلٍّ من الدوال الآتية:

أ $د_{١}(س) = ٢س^{٣} + س + ٣$

ب $د_{٢}(س) = \frac{٢س}{س^{٢} - ٢س - ٣}$

ج $د_{٣}(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

٣ ارسم منحنيات الدوال التى قواعدها مايلى. وأوجد مدى كلا منها وأذكر نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية:

أ $د_{١}(س) = ٤ + س$

ب $د_{٢}(س) = س^{٢} - ١$

ج $د_{٣}(س) = (س + ٢)^{٣}$

٤ استخدم منحنى الدالة حيث د(س) = |س| فى التمثيل البيانى لكل مما يأتى:

أ $د_{١}(س) = |س - ١|$

ب $د_{٢}(س) = ٢ - |س|$

ج $د_{٣}(س) = |س + ٢| - ٣$

ثم ابحث إطراد الدالة الناتجة.

(٥) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} فى التمثيل البيانى لكل مما يأتى:

أ د$_{١}$(س) = س^{٢} – ٣ ب د$_{٢}$(س) = ٢– س^{٢} ج د$_{٣}$(س) = (س – ٢)^{٢} + ١

ثم أوجد معادلة محور التماثل لكل منها .

(٦) ارسم منحنى الدالة د حيث: د(س) = (٣س – ٦)^{٢} – ٤ ثم أوجد إحداثي نقطة رأس المنحنى، ومعادلة محور التماثل ثم ادرس إطراد الدالة.

(٧) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} فى التمثيل البيانى لكل مما يأتى:

أ د$_{١}$(س) = (س + ٣)^{٣} ب د$_{٢}$(س) = - (س – ١)^{٣} ج د$_{٣}$(س) = س^{٣} – ١

د د$_{٥}$(س) = (س + ١)^{٣} – ٢

(٨) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ فى التمثيل البيانى لكل مما يأتى:

أ د$_{١}$(س) = $\frac{١}{س + ١}$ ب د$_{٢}$(س) = $\frac{-١}{س + ٢}$ ج د$_{٣}$(س) = $\frac{١}{س}$ + ٢

د د$_{٤}$(س) = ١ - $\frac{١}{س}$ هـ د$_{٥}$(س) = $\frac{س + ١}{س}$

(٩) أوجد مجموعةَ حل المعادلاتِ والمتباينات الآتيةِ:

أ |٢س - ١| - ٣ = ٠ ب |س + ٢| = |س - ٣|

جـ س^{٢} – ٣|س| - ١٠ = ٠ د |س + ٣| < ١

هـ |٣س - ٧| ≥ ٥ و |٣س - ٢| ≤ ٦ ز $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩}$ > ٥

اختبار تراكمى

(١) ارسم منحنى الدالتين د، ر حيث د(س) = س + ١ ، ر(س) = ٥ - س ومن الرسم أوجد:

أ إحداثيي نقط تقاطع كل منهما مع محورِ السينات.

ب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنيين.

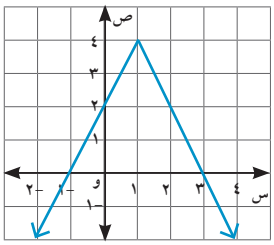
ج مساحة المثلث المحدد بالمستقيمين المتقاطعين ومع السينات.

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل الدالة ر حيث ر(س) = |س-١| - ٢ ثم أوجد مدى الدالة ومعادلة محور التماثل.

(٣) ارسم منحنى الدالة د حيثُ: د(س) = $\begin{cases} س^{٢} & \text{لكل } -٥ \leqslant س < ٢ \\ ٦-س & \text{لكل } ٢ \leqslant س \leqslant ٨ \end{cases}$

➤ ومن الرسم عين مدى الدالة وابحث إطرادها.

(٤) في الشكل المقابل:



أ اكتب إحداثي نقطة رأس المنحنى.

ب اكتب قاعدة الدالة.

ج أوجد مدى الدالة وابحث إطرادها.

د اكتب معادلة محور التماثل.

(٥) ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = (س-١)^{٣} واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها وبين نوعَها من حيث كونها زوجيةً أو فرديةً أو غير ذلك.

(٦) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيلِ الدالة ر حيث ر(س) = د(س) + ٢ ثم اكتبْ نقطةَ تماثلِ الدالة الناتجة وابحث إطرادها.

(٧) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س+١}$.

أوجد مجال الدالة د ونقطة التماثل لمنحنى هذه الدالة.

حل المعادلة د($\frac{١}{س}$) = ٤

(٨) أوجد جبريًّا مجموعةَ حل كل من المعادلات والمتباينات الآتيةِ:

أ |س + ٥| = ٩

ب س^{٢} + |س| = ٢

ج $\sqrt{٤س^{٢}-١٢س+٩}$ = ١

د |٢س - ٥| ⩾ ٧

هـ |٣س + ١| < ٧

و |س - $\frac{١}{٤}$| > $\frac{٧}{٤}$

(٩) آلة مكتبية قيمتها الحالية ٢٤٠٠٠ جنيه تستهلك سنويًّا بنسبة ١٠٪ من قيمتها الحالية نتيجة للاستخدام المتكرر لها. عبر عن قيمة الآلة كدالةٍ في عدد السنوات (ن).

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

Exponents, Logarithms and their Applications



أهداف الوحدة

في نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الدالة الأسية.
- يتعرف التمثيل البيانى للدالة الأسية، ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يحل معادلة أسية على الصورة : أس = ب.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية.
- يحول جبريًا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يتعرف التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية فى فترات محدودة، ويستنتج خواصها.
- يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية بيانيًا.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات.
- يحل معادلات لوغاريتمية.
- يحل مسائل تشتمل على تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- يتعرف اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠.
- يوجد قيمة اللوغاريتمات باستخدام الآلة الحاسبة.
- يستخدم الآلة الحاسبة في حل بعض المعادلات الأسية .

المصطلحات الأساسية

القوة النونية	*The nth power*	دالة أسية.	*Expontential function*	انعكاس	*Reflection*		
الأساس	*Base*	نمو إسى.	*Exponential growth*	لوغاريتم	*Logarithm*		
الأس	*Exponent*	تضاؤل أسى.	*Exponential decay*	معادلة لوغاريتمية.	*Logarithmic equation*		
جذر نونى	*n^{th} root*	مجال	*Domain*	دالة لوغاريتمية	*Logarithmic function*		
أس كسرى	*Rational – exponent*	مدى	*Range*				

دروس الوحدة

الدرس الأول: الأسس الكسرية

الدرس الثانى: الدالة الآسية

الدرس الثالث: حل المعادلات الأسية وتطبيقاتها

الدرس الرابع: الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها

الدرس الخامس: بعض خواص اللوغاريتمات

مقدمة الوحدة

أُدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات فى أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر ، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية (لو$_{أ}$ (س ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص)، ويرجع الفضل للعالم ليونهارت أويلر فى القرن الثامن عشر، بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم التابع الأسى ليتوسع مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالتوابع.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة الڤولت، كما يستخدم الأس الهيدروجينى (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلولٍ ما.

مخطط تنظيمى للوحدة



الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برامج رسومية geogebra-graph

الوحدة الثانية

الدرس ١

الأسس الكسرية

Rational exponents

سوف تتعلم

- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النونى.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية

القوة النونية	*The n^{th} power*
الأساس	*base*
الأس	*exponent*
جذر نونى	*n^{th} root*
أس كسرى	*rational exponent*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

تذكر أن

إذا كان أ، ب ∈ ع*، م، ن ∈ صـ

■ $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times \times أ$

حيث أ مكرر كعامل ن من المرات

■ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $أ^{ن} = \frac{١}{أ^{-ن}}$

حيث ن ∈ صـ +

$أ^{صفر} = ١$

$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

$أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

$(أ ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

$(\frac{أ}{ب})^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

$(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

تمهيد

سبق أن درست كُلًّا من الأسس والجذور عندما يكون الأس عددًا صحيحا، كما تعرفت على الجذور التربيعية لعدد حقيقى غير سالب وعلى خواص الجذور التربيعية والتكعيبية، وسوف نتعرف في هذا الدرس على الأسس الكسرية.

مثال

(١) أوجد فى أبسط صورة قيمةَ المقدارِ:

$(٣^{٢})^{٣} \times (-٣)^{٦} \times (٣)^{٢}$

الحل

المقدار $= ٣^{٦} \times ٣^{-١٢} \times ٣^{٦} = ٣^{٦-١٢+٦} = ٣^{صفر} = ١$

حاول أن تحل

(١) أوجد فى أبسطِ صورة قيمةَ كل من:

أ $س^{-٣} \times س^{٢} \times س^{٤}$

ب $\frac{٥ \times ٥^{-٤} \times ٥^{٢}}{٥^{-٥} \times ٥^{٤}}$

جـ $(٢^{٢})^{-٣} \times ٢^{٩} \times (٣ \times ٢)^{-١}$

مثال

(٢) إذا كانت ن ∈ صـ أثبت أن $\frac{٩^{ن+١} \times ٤^{ن-٢}}{٩^{ن+١} \times ٤٨^{ن-١}} = ٣$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{٩^{ن+١} \times (٤)^{ن-٢}}{٩^{ن+١} \times (٣ \times ٤^{٢})^{ن-١}}$

$= \frac{٩^{ن+١} \times ٢^{٢ن-٤}}{٩^{ن+١} \times ٣^{ن-١} \times ٢^{٢ن-٤}}$

$= ٣^{ن+١-ن+١} \times ٢^{٢ن-٤-٢ن+٤}$

$= ٣^{٢} \times ٢^{صفر} = ٩ \times ١$ (الطرف الأيسر)

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن $\frac{٩^{س+١} \times ٢^{س}}{١٨^{س} \times ٣} = ٣$

تعلم

الجذر النونى *The n^{th} root*

علمت أن الجذر التربيعى لعدد ما هو عملية عكسية لتربيع ذلك العدد، وبالمثل فإن الجذر النونى لعدد هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ن).

مثال:

١ إذا كانت $س^{٣} = ٢٧$ فإن ٣ هو الجذر التكعيبى للعدد ٢٧ أى أن $٣ = \sqrt[٣]{٢٧}$

٢ إذا كانت $س^{٥} = ٣٢$ فإن ٢ هو الجذر الخامس للعدد ٣٢ أى أن $٢ = \sqrt[٥]{٣٢}$

٣ إذا كانت $س^{ن} = أ$ فإن س هو الجذر النونى للعدد أ أى أن $س = \sqrt[ن]{أ}$

تعريف ٢

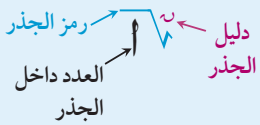
إذا كان ن = صـ$^{+}$ - {١} ، أ ∈ ع وكان $س^{ن} = أ$ فإن س تسمى **الجذر النونى** للعدد أ ويرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ ، $أ^{\frac{١}{ن}}$

مثال:

$(١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$ $\quad$ $(-٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٩}$ ∉ ع

$-(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = -\sqrt[٣]{٢٧} = -٣$ $\quad$ $(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٢٤٣} = -٣$

لاحظ أن



مثال

٣ إذا كانت $س^{ن} = أ$ فأوجد قيم س فى ع (إن وجدت) فى كُلٍّ من الحالات الآتية:

أ ن = ٤ ، أ = صفر $\quad$ ب ن = ٢ ، أ = ٩

جـ ن = ٦ ، أ = -٤ $\quad$ د ن = ٣ ، أ = -٨

الحل

أ عندما ن = ٤، أ = صفر تكون $س = \sqrt[٤]{٠} = ٠$

ب عندما ن = ٢ ، أ = ٩ تكون $س = \pm\sqrt{٩} = \pm ٣$

جـ عندما ن = ٦ ، أ = -٤ تكون $س = \sqrt[٦]{-٤}$ غير معرف في ع .

د عندما ن = ٣ ، أ = -٨ تكون $س = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

نستنتج من المثال السابق أن:

إذا كانت $س^{ن} = أ$ فإن قيم س التى تحقق المعادلة تتضح من الجدول التالى:

ن	أ	$\sqrt[ن]{أ}$
ن ∈ ص$^{+}$ - {١}	أ = ٠	$\sqrt[ن]{أ}$ = صفر
عدد صحيح زوجى موجب	أ < ٠	يوجد جذران حقيقيان هما $\pm\sqrt[ن]{أ}$
عدد صحيح زوجى موجب	أ > ٠	لاتوجد جذور حقيقية.
عدد صحيح فردى موجب، ن ≠ ١	أ ∈ ع	يوجد جذر حقيقي واحد فقط هو $\sqrt[ن]{أ}$

حاول أن تحل

(٣) أوجد إن أمكن كُلًّا من:

أ $-\sqrt{٣٦}$ ب $-\sqrt{٤٩}$ ج $\sqrt[٤]{٨١}$

د $-\sqrt[٣]{١٢٥}$ هـ $-\sqrt[٥]{٣٢}$ و $|\sqrt[٧]{-١٢٨}|$

(٤) تفكير ناقد: وضح بمثال عددى الفرق بين الجذر السادس للعدد أ وبين $\sqrt[٦]{أ}$

تذكر

إذا كان ن ∈ صـ$^{+}$ - {١}، م ∈ صـ$^{+}$، $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ع فإن: $\sqrt[ن]{أ^{م}} = \sqrt[ن]{أ}^{م} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$

مثال ٣

$(١٦)^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{١٦})^{٣} = (٤)^{٣} = ٦٤$

$\sqrt[٣]{(-١٢٥)^{٢}} = (\sqrt[٣]{-١٢٥})^{٢} = (-٥)^{٢} = ٢٥$

مثال

(٤) أوجد فى أبسط صورة كُلًّا من:

أ $-\sqrt[٣]{٨ أ^{٦} ب^{٩}}$ ب $\pm\sqrt{٦٤ (أ^{٢} + ٣)^{٦}}$

الحل

أ $-\sqrt[٣]{٨ أ^{٦} ب^{٩}} = -\sqrt[٣]{(٢ أ^{٢} ب^{٣})^{٣}} = -٢ أ^{٢} ب^{٣}$

ب $\pm\sqrt{٦٤ (أ^{٢} + ٣)^{٦}} = \pm\sqrt{[٨ (أ^{٢} + ٣)^{٣}]^{٢}}$

$= \pm ٨ (أ^{٢} + ٣)^{٣}$

حاول أن تحل

(٥) أوجد فى أبسط صورةٍ كُلًّا من:

أ $-\sqrt[٤]{٦٢٥ أ^{١٢}}$ حيث أ < ٠ ب $-\sqrt[٥]{٢٤٣ ب^{٥}}$ ج $\pm\sqrt{١٢٨ (أ + ب)^{٧}}$

تعلم

استخدام المقياس *Using The modulus*

يستخدم مِقياس العدد إذا كان دليل الجذر (ن) عددًا زوجيًّا فيكون $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$، أما إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًّا فلا داعى لاستخدام المقياس.

مثال

(٥) أوجد فى أبسط صورةٍ مستخدمًا المقياس كُلًّا من:

أ $\sqrt{أ^{٢}}$ ب $\sqrt[٤]{١٦(س^{٢}-١)^{١٢}}$

لاحظ أن

مربع أى من العددين (أ) أو (-أ) هو $أ^{٢}$

الحل

أ $\sqrt{أ^{٢}} = |أ|$

ب $\sqrt[٤]{١٦(س^{٢}-١)^{١٢}} = \sqrt[٤]{٢^{٤}[(س^{٢}-١)^{٣}]^{٤}}$

$= \sqrt[٤]{٢^{٤}[(س^{٢}-١)^{٣}]^{٤}} = ٢|(س^{٢}-١)^{٣}|$

حاول أن تحل

(٦) أوجد فى أبسط صورةٍ مستخدمًا المقياس كُلًّا من:

أ $\sqrt[٤]{١٦أ^{١٢}}$ ب $\sqrt[٦]{(س+٢ص)^{١٨}}$

تعريف

إذا كان ن ∈ صـ$^{+}$ - {١}، م ∈ صـ$^{+}$، $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ع فإن: $أ^{-\frac{م}{ن}} = \frac{١}{أ^{\frac{م}{ن}}}$

مثال: $٧^{-\frac{٣}{٥}} = \frac{١}{٧^{\frac{٣}{٥}}}$ ، $٤^{\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{٤^{-\frac{٣}{٢}}}$

تعريف

إذا كان ن ∈ صـ$^{+}$ - {١}، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ عددين حقيقيين فإن:

مثال:

١ $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢ $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث ب ≠ صفر

التعاريف (٢)، (٣)، (٤)، (٥) السابقة تستخدم فى تعميم قوانين الأسس النسبية.

مثال

٦ أوجد فى أبسط صورة كُلًّا من:

أ $\frac{\sqrt[٣]{٨ \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$

ب $\frac{٣٢^{-\frac{٣}{٥}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}}}{\sqrt[٤]{٤} \times ١٦^{-\frac{٥}{٨}}}$

الحل

أ المقدار $= \frac{\sqrt[٣]{٨^{\frac{١}{٣}} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$ تحويل الجذور إلى أسسٍ كسرية.

$= \frac{(٣٢)^{\frac{١}{٣}} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{(٢ \times ٣)^{-٢} \times ٣^{٢}}$ تحليل كل أساس إلى عوامله الأولية.

$= \frac{(٢)^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{-٢} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٣^{-٢} \times ٢^{-٢} \times ٣^{٢}}$ بالتبسيط

$= ٢^{-٢-\frac{٣}{٢}+\frac{٢}{٢}} \times ٣^{٢+٢}$

$= ٢^{\text{صفر}} \times ٣^{\text{صفر}} = ١$

ب المقدار $= \frac{٣٢^{\frac{٣}{٥}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}}}{١٦^{-\frac{٥}{٨}} \times ٤^{\frac{١}{٤}}}$ تحويل الجذور إلى أسسٍ كسرية.

$= \frac{(٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} \times (٢^{٣})^{\frac{٢}{٣}}}{(٢^{٤})^{-\frac{٥}{٨}} \times (٢^{٢})^{\frac{١}{٤}}}$ تحليل كل أساس إلى عوامله الأولية.

$= \frac{٢^{٣} \times ٢^{٢}}{٢^{-\frac{٥}{٢}} \times ٢^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٢^{٣+٢-(-\frac{٥}{٢})-\frac{١}{٢}} = ٢^{٤} = ١٦$

حاول أن تحل

٧ أوجد فى أبسطِ صورة كُلًّا من :

أ $\sqrt[٣]{٢٤٣} \times \sqrt[٣]{٨^{-١}}$

ب $\frac{\sqrt[٤]{٤} \times \sqrt[٥]{٢}}{\sqrt[١٠]{٤} \times \sqrt[٨]{٢}}$

حل المعادلات:

مثال

٧ أوجد فى ع مجموعة حل كُلٍّ من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$

ب $(س + ١)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

الحل

أ ∵ $س^{\frac{2}{3}} = ٩$ برفع الطرفين للقوة ٣

∴ $(س^{\frac{2}{3}})^{3} = ٩^{3}$

∴ $س^{2} = ٩^{3}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ $س = \pm \sqrt{(٩^{3})}$

∴ $س = \pm ٢٧$

∴ مجموعة الحل = {٢٧، - ٢٧}

ب $(س + ١)^{\frac{2}{4}} = ٨$ برفع الطرفين للقوة ٤

∴ $(س + ١)^{2} = ٨^{4}$ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

∴ $(س + ١) = (\sqrt[3]{٨})^{4}$

∴ $س + ١ = ١٦$

∴ $س = ١٥$

∴ مجموعة الحل = {١٥}

حاول أن تحل

٨ أوجد في ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية :

أ $س^{\frac{5}{4}} = ٣٢$ ب $(س - ٣)^{\frac{4}{3}} = ٨١$

مثال

٨ **الربط بالهندسة:** إذا كان ل طول ضلع المربع الذى مساحته م يعطى بالعلاقة ل = $م^{\frac{1}{2}}$

أ احسب طول ضلع المربع الذى مساحته ٢٥سم^{٢}

ب احسب طول ضلع المربع الذى مساحته ١٧سم^{٢} مقربًا الناتج لرقمٍ عشرى واحد.

الحل

أ ل = $٢٥^{\frac{1}{2}} = \sqrt{٢٥} = ٥$سم

ب ل = $١٧^{\frac{1}{2}} = \sqrt{١٧} = ٤,١٢٣١٠$

وبالتقريب لرقم عشرى واحد ∴ ل ≃ ٤,١ سم

حاول أن تحل

٩ إذا كان ل طول ضلع مكعبٍ حجمُه ع يعطى بالعلاقة ل = $ع^{\frac{1}{3}}$ أوجد طول ضلع المكعب الذى حجمه ٢٧

تمـــاريـن الدرس الأول

(١) اكتب كُلًّا ممايأتى على صورةٍ أسية:

أ) $\sqrt[3]{س}$ ب) $\sqrt[4]{أ^{3}}$ جـ) $\sqrt[3]{2 ب}$

د) $\sqrt[4]{أ^{2} ب^{3}}$ هـ) $\sqrt[3]{ص^{4}}$ و) $\frac{\sqrt[3]{س}}{\sqrt[5]{س^{3}}}$

(٢) اكتب كُلًّا ممايأتى على صورة جذرية:

أ) $أ^{\frac{1}{2}}$ ب) $ب^{\frac{2}{3}}$ جـ) $٦ ص^{\frac{3}{4}}$

د) $٨ ب^{\frac{4}{9}}$ هـ) $(٣ س)^{-\frac{2}{3}}$ و) $٥^{\frac{1}{2}} \times ٢٥^{\frac{1}{3}}$

(٣) أوجد قيمة كلٍّ ممايأتى فى أبسط صورة:

أ) $(١٦)^{\frac{3}{4}}$ ب) $(-٣٢)^{\frac{3}{5}}$ جـ) $٢٧^{-\frac{4}{3}}$

د) $(\frac{١}{٨})^{\frac{2}{3}} + (\frac{١}{٤})^{\frac{1}{2}}$ هـ) $\frac{\sqrt[4]{٤}}{\sqrt{٢}}$ و) $\frac{١}{(٢^{-٢} \times ٤^{\frac{1}{2}} \times ٨^{\frac{2}{3}})^{-٢}}$

(٤) أوجد فى أبسط صورة ناتجَ العمليات لآتية:

أ) $(أ^{-\frac{2}{3}})^{-٣}$ ب) $\sqrt[3]{س} \times س^{\frac{1}{2}}$ جـ) $(٣^{٢} + ٤^{٢})^{\frac{1}{2}}$

د) $(س^{\frac{1}{2}} + ص^{\frac{1}{2}})(س^{\frac{1}{2}} - ص^{\frac{1}{2}})$ هـ) $(س^{\frac{1}{3}} - ص^{\frac{1}{3}})(س^{\frac{2}{3}} + س^{\frac{1}{3}} ص^{\frac{1}{3}} + ص^{\frac{2}{3}})$

و) $(س^{\frac{1}{2}} + س^{-\frac{1}{2}})^{٢}$ ز) $(٣^{١} + ٣^{٢} + ٣^{٣})^{\frac{1}{2}}$

(٥) اختصر كُلًّا ممايأتى لأبسط صورة :

أ) $\sqrt[3]{٢٤٣} + \sqrt[3]{٥١٢}$ ب) $(\frac{١٦}{٨١})^{\frac{1}{4}} \times (\frac{٧٢٩}{٨})^{\frac{1}{3}}$ جـ) $(١٦)^{\frac{3}{2}} \div (٨)^{\frac{2}{3}}$

د) $(٢٧)^{\frac{2}{3}} - (٦٤)^{\frac{2}{6}}$ هـ) $\sqrt{٠,١} \times \sqrt[3]{٠,٢١٦} \times \sqrt{٢,٥}$ و) $\frac{(\frac{3}{16})^{-\frac{3}{8}} \times ٤)}{٢^{-\frac{5}{4}}}$

ز) $(١٢٥)^{\frac{2}{3}} \times ٨١^{\frac{1}{4}} \times (١٥)^{-١}$ ح) $\frac{١٦ س^{-\frac{1}{4}} \times ٩ س^{+\frac{1}{2}}}{٨ س^{-١} \times ١٨ س^{+٢}}$

(٦) اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات:

أ) إذا كان $\sqrt[3]{س^{3}} = ٩$ فإن س ∋ $(\{٢٧\}، \{-٢٧، ٢٧\}، \{١\}، \theta)$

ب) $٦٤^{-\frac{1}{6}} =$ $(٢، -٢، -\frac{١}{٢}، \frac{١}{٢})$

جـ) $\sqrt[3]{س^{-٣}} =$ $(س^{-١}، -س، |س^{-١}|، -|س|)$

د) $\sqrt[4]{س^{٤} ص^{٨}} =$ $(س ص^{٢}، \pm س ص^{٢}، |س| ص^{٢}، س |ص^{٢}|)$

هـ) إذا كان $س^{-\frac{3}{2}} = ٨$ فإن س = ... $(٤، -٤، \frac{١}{٤}، -\frac{١}{٤})$

و) $\frac{٦^{-\frac{1}{5}} \times ٦^{\frac{3}{5}}}{\sqrt[3]{٣٦}} =$ $(١، ٦، \frac{١}{٦}، \sqrt{٦}، -\sqrt{٦})$

(٧) أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{1}{2}} = ٥$ ب $س^{\frac{7}{4}} = \frac{1}{128}$ ج $\sqrt[3]{س^{-1}} = ٢٧$

د $(س - ٥)^{\frac{5}{4}} = ٣٢$ هـ $٣ س^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{8}$ و $٢ ٣^{س-١} = \frac{١٦}{\sqrt{٢}}$

(٨) الربط بالاقتصاد: إذا علم أن الفائدة (ر) لأحد البنوك على مبلغ وقدرُه (أ) بعد (ن) سنة تعطى بالعلاقة $ر = (\frac{جـ}{أ})^{\frac{1}{ن}} - ١$ حيث جـ جملة المبلغ بعد ن سنة . فإذا أودع جمال مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه وبعد ٣ سنوات أصبح جملة المبلغ ١٢٥٩٧، أوجد النسبة المئوية السنوية للفائدة.

(٩) اكتشف الخطأ:

أ إذا كان $س^{\frac{2}{3}} = ٤$ ، فإن س = ٨

ب $\sqrt[4]{س^{4}} = س$

(١٠) اختبر صحة العلاقة:

$\sqrt[ن]{أ^{م}} = \sqrt[م]{أ^{ن}}$ حيث الطرفان معرفان لجميع قيم أ الحقيقية

(١١) نشاط:

استخدم الآلة الحاسبةَ فى تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج لرقمين عشريين):

أ $٧٥ (١,٢١)^{\frac{19}{2}}$

ب $\frac{\sqrt[5]{٢^{-١}} \times \sqrt[3]{٧^{-٣}}}{\sqrt[3]{٤^{-٣}}}$

(١٢) الربط بالتجارة: بدأ محمد مشروع تربية الأرانب، فإذا كان عدد الأرانب فى بداية المشروع هو ٧٥ أرنبًا وكان عدد الأرانب فى تكاثرها يتبع العلاقة ع = ٧٥ $(٤,٢٢)^{\frac{ن}{3}} - ١$ حيث ن عدد الأشهر. أوجد العدد المتوقع للأرانب بعد مرور ٥ أشهر.

(١٣) الربط بالحجوم: إذا كان طول ضلع المكعب ل يتحدد بالعلاقة ل = $\sqrt[3]{ع}$ حيث ع حجم المكعب بالوحدات المكعبة .أوجد طول ضلع مكعب حجمُه ١٣٣١سم٣

تفكير إبداعى:

(١٤) الربط بالحجوم: إذا كان نصف طول قطر كرة ﻫ حجمها ع يعطى بالعلاقة ﻫ = $\sqrt[3]{\frac{٣ع}{٤\pi}}$.

أ أوجد طول نصف قطر كرةٍ حجمُها ٢٧٠٠٠سم٣.

ب احسب التغير فى حجم الكرة عند زيادة طول نصف القطر إلى الضعف.

الدالة الآسية

Exponential function

ترتبط كثير من الظواهر الحياتية بموضوع الدالة الأسية فالزيادة السكانية ومعدل الفائدة البنكية والتكاثر بالانقسام فى بعض الكائنات وغيرها من الظواهر، كل منها يتبع قاعدة من قواعد الدالة الأسية، وفيمايلى عرض لبعض خواص هذه الدالة وتطبيقاتها:

سوف تتعلم
- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية
- دالة أسية. *expontential function*
- نمو إسى. *exponential growth*
- تضاؤل أسى. *exponential decay*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

تعلم

الدالة الأسية *Exponential function*

تعريف ١

إذا كان أ عددًا حقيقيًّا موجب ≠ ١ فإن الدالة:

د حيث د: ع ⟵ ع$^+$ ، د(س) = أ^{س}

تسمى **دالة اسية** اساسها أ

تعبير شفهى: وضح لماذا لاتمثل الدالة د(س) = (-٣)^{س} حيث س ∈ ع دالة أسية

التمثيل البيانى للدالة الأسية *Graphical representation of the exponential function*

مثال

(١) بالاستعانة بقيم س ∈ [-٣، ٣] ارسم فى شكل واحد جزءًا من منحنى كل من الدالتين:

د(س) = ٢^{س} ، ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

الحل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
ر(س)	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

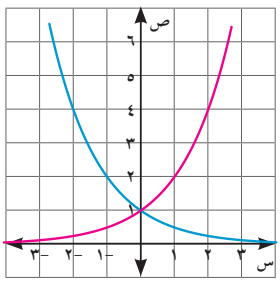
من الرسم يمكن استنتاج الخواص الآتية للدالة الأسية

١ الدالة د(س) = ٢^{س} متزايدة على مجالها لأن (أ > ١)

الدالة ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ متناقصة على مجالها لأن (٠ < أ < ١)

٢ مدى كل من الدالتين هو ع$^+$

٣ منحنى الدالة د(س) = ٢^{س} هو صورة منحنى الدالة ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات .



أضف إلى معلوماتك

تسمى الدالة الأسية د(س)= أ^{س} فى حالة أ > ١ بدالة النماء (*growth function*) وترتبط بكثير من التطبيقات الحياتية مثل التزايد السكانى والفائدة المركبة للبنوك

حاول أن تحل

(١) بالاستعانة بقيم س ∈ [-٢ ، ٢] ارسم فى شكلٍ واحدٍ منحنى كُلٍّ من الدوال د١(س) = ٢^س، د٢(س) = ٣^س ، د٣ (س) = ٤^س

(٢) تفكير ناقد: أى الدوال السابقة أكثر نماءً ؟ فسِّرْ إجابتك

مثال

(٢) إذا كانت د(س) = ٣^س فأكمل مايأتى :

أ د(٢) = ... ب د (س +٢) = ... × ٣^س ج د(س) × د(-س) = ...

الحل

أ د(٢) = ٣^٢ = ٩

ب د(س +٢) = ٣^(س+٢) = ٣^س × ٣^٢ = ٩ × ٣^س

ج د(س) × د(- س) = ٣^س × ٣^-س = ٣^(س-س) = ٣^صفر = ١

تعلم

تطبيقات على الدالة الأسية:

أولاً: النمو الأسى *Exponential growth*

تظهر الدالة الأسية التى أساسها أكبر من ١ والمعروفة بدالة النمو فى كثير من الظواهر الحياتية، ومن أبرزها تطبيق الفائدة المركبة فى البنوك، فمثلاً عند إيداع مبلغ من المال أ فى أحد البنوك التى تُعطى فائدة سنوية مركبة قدرُها ر فإن إجمالى المبلغ بعد ن سنة يُعطى من العلاقة:

$$ج = أ (١ + ر)^{ن}$$

ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة

وإذا كان العائد نصف سنوى، فإن العلاقة تأخذ الصورة:

$$ج = أ (١ + \frac{ر}{٢})^{٢ن}$$

وإذا كان العائد ربع سنوى، فإن العلاقة تأخذ الصورة:

$$ج = أ (١ + \frac{ر}{٤})^{٤ن}$$ وهكذا .

مثال

(٣) أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تُعطى فائدة سنويةً مركبةً قدرُها ٨٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كُلٍّ من الحالات الآتية:

أ العائد سنوى. ب العائد ربع سنوى. ج العائد شهرى.

الحل

باستخدام العلاقة ج = أ(١ + $\frac{ر}{س}$)$^{ن س}$ حيث س التقسيم السنوى:

أ العائد سنوى ∴ س = ١

ج = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠} = ١٠٧٩٤,٦٢

ب العائد ربع سنوى ∴ س = ٤

ج = ٥٠٠٠ (١ + $\frac{٠,٠٨}{٤}$)$^{١٠ \times ٤}$ = ١١٠٤٠,٢

جـ العائد شهرى ∴ س = ١٢

ج = ٥٠٠٠ (١ + $\frac{٠,٠٨}{١٢}$)$^{١٠ \times ١٢}$ = ١١٠٩٨,٢

حاول أن تحل

(٣) أودع رجل مبلغ ١٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٥٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور ٨ سنوات فى كل من الحالات الآتية:

أ العائد سنوى. ب العائد نصف سنوى. جـ العائد شهرى.

ثانيًا: التضاؤل الأسى *exponential decay*

يمكن استخدام الدالة د(ن) = أ (١ - ر)^{ن} لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبةٍ مئويةٍ ثابتة قدرُها ر فى فترات زمنية متساوية، عددها ن.

مثال

(٤) إذا بلغ أقصى إنتاج لمنجم من الذهب فى السنة هو ١٨٥٠ كجم، وأخذ هذا الإنتاج فى التناقص سنويًا بنسبة ٩٪ .

أ اكتب دالة أسية تمثل انتاج الذهب من هذا المنجم بعد ن سنة .

ب قدر لأقرب كجم إنتاج المنجم بعد مرور ٨ سنوات.

الحل

أ = ١٨٥٠ ، ر = ٠,٠٩

أ دالة التضاؤل الأسى د(ن) =(أ - ر)^{ن}

د(ن) = ١٨٥٠ (١ - ٠,٠٩)^{ن}

ب بعد مرور ٨ سنوات (بالتعويض عن ن = ٨)

∴ د(٨) = ١٨٥٠ (١ - ٠,٠٩)^{٨} ≃ ٨٧٠ كجم

حاول أن تحل

(٤) إذا كان السعر السوقى لسيارة يتناقص طبقًا للعلاقة س = ١٥٠٠٠٠ (٠,٩٤)^{ن} حيث س سعر السيارة بالجنيه ن الزمن بالسنوات من لحظة شرائها . أوجد :

أ سعر السيارة عند شرائها جديدة. ب سعر السيارة بعد مرور ٣ سنوات من شرائها.

تمـــاريـــن الدرس الثانى

(١) ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها وبين: أى منها تكون متزايدة وأى منها متناقصة؟

أ د(س) = ٢^س ب د(س) = ٣^س جـ د(س) = (١/٣)^س د د(س) = ٢^-س+١

(٢) أكمل مايأتى:

أ الدالة د(س) = ٢^س تقطع محور الصادات فى النقطة

ب الدالة د(س)=٢^-س تقطع محور الصادات فى النقطة

جـ إذا مر منحنى الدالة د(س) = أ^س بالنقطة (١، ٣) فإن أ = ...

د منحنى الدالة د(س) = ٣^س هو صورة منحنى الدالة ر(س) = (١/٣)^س بالانعكاس فى

هـ الدالة د حيث د(س) = أ^س تكون تناقصية إذا كان أ ∈

و الدالة د حيث د(س) = (٢أ)^س تكون متزايدة عندما أ ∈

(٣) **الربط بالسكان:** إذا كان عدد سكان إحدى الدول فى نهاية عام ٢٠٠٠ هو ٤٣٢٦٥٣٤١ نسمة، وكان معدل الزيادة السكانية فى السنة يُساوى ١,٥٪ :

أ أوجد صيغةً تمثل عدد السكان لهذه الدولة بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠.

ب استخدم هذه الصيغة لإيجاد عددِ السكان المتوقع لهذه الدولة عام ٢٠٢٠، وذلك إذا استمرت الزيادة بنفس المعدل.

(٤) **الربط بالاستثمار:** إذا استثمر رجل مبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه في مشروعٍ، بحيث ينمو هذا المبلغ تبعًا لدالةٍ أسية بزيادة سنوية قدرُها ٦٪، أوجد :

أ صيغةً توضحُ نماء هذا المبلغ بعد ن سنة.

ب قدر هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات.

(٥) أوجد جملة مبلغ ٨٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يُعطى فائدة سنويةً مركبة قدُرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات.

(٦) الربط بالثروة السمكية : إذا كان عدد أسماك السلمون فى إحدى البحيرات يتزايد تبعًا لدالة النمو الأسى د(ن) = ٢٠٠ (١,٠٣)^ن حيث ن عدد الأسابيع أوجد عدد أسماك السلمون فى هذه البحيرة بعد مرور ٨ أسابيع.

(٧) إذا كانت د(س)= ٥^س+١ أثبت أن $\frac{د(س) \times د(س-١)}{د(س-٢) \times د(س+١)}$ = ١

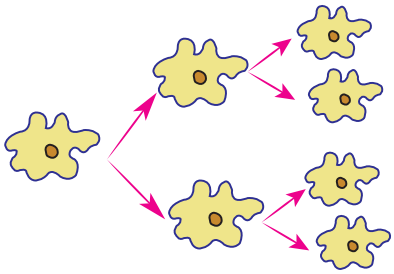
حل المعادلات الأسية وتطبيقاتها

Solving power equations and Their applications

سوف تتعلم
- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية
- معادلة أسية. *power equation*
- حل بياني. *Graphical solution*

الأدوات المستخدمة
- إلة حاسبة علمية
- برامج رسومية



تتكاثر الأميبا بطريقة الانقسام الثنائي بحيث تنقسم الخلية الواحدة إلى خليتين بعد فترة زمنية ثابتة، ثم تنقسم كل خلية جديدة إلى خليتين بعد نفس الفترة الزمنية، وفي نفس الشروط وهكذا

١ أوجد عدد الخلايا الناتجة من خلية واحدة بعد ٩ فترات زمنية.

٢ أوجد عدد الفترات الزمنية اللازمة لإنتاج ٨١٩٢ خلية من هذه الخلية.

تعلم

المعادلة الأسية *Power equation*

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس فإنها تسمى معادلة أسية مثل $(٢^{س+١} = ٨)$ ولحل المعادلة الأسية نوجد:

أولًا: إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ حيث $أ \notin \{٠، ١، -١\}$ فإن $م = ن$.

مثال

(١) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س+٣} = ٨$ ب $٣^{س-٢} = (\frac{١}{٢٧})^{س}$

الحل

أ $٢^{س+٣} = ٨$

$\therefore ٢^{س+٣} = ٢^{٣}$

$\therefore$ س + ٣ = ٣ ومنها س = صفر

$\therefore$ مجموعة الحل = {صفر}

ب $٣^{س-٢} = (\frac{١}{٢٧})^{س}$

$\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{-٣س}$

$\therefore$ س - ٢ = -٣س

$\therefore$ س + ٣س = ٢

$\therefore$ ٤س = ٢ ومنها س = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

حاول أن تحل

(١) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلاتِ الآتيةِ:

أ) $٥^{س+١} = ٢٥$ ب) $٢^{١-س^{٢}} = \frac{١}{٨}$

ثانيًا: إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ حيث أ، ب $\notin$ {٠، ١، -١}، فإن

إما: ١- م = صفر

أو: ٢- أ = ب عندما م عدد فردي.

٣- أ = |ب| عندما م عدد زوجي.

مثال

(٢) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلاتِ الآتيةِ:

أ) $٣^{س+٢} = ٧^{س+٢}$ ب) $٤^{س-٢} = ٣^{٢س-٤}$

الحل

أ) ∵ $٣^{س+٢} = ٧^{س+٢}$

∴ س + ٢ = صفر ومنها س = -٢

∴ مجموعة الحل = {-٢}

ب) ∵ $٤^{س-٢} = ٣^{٢س-٤}$ ∴ $٤^{س-٢} = ٣^{٢(س-٢)}$

∴ $٤^{س-٢} = ٩^{س-٢}$

∴ س - ٢ = صفر ومنها س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

حاول أن تحل

(٢) أوجد في ع مجموعة حل المعادلة:

أ) $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ ب) $٢^{٢س-٦} = ٧^{س-٣}$

مثال

(٣) إذا كانت د(س) = $٢^{س+١}$ أوجد قيمة س التي تحقق د(س) = ٣٢

الحل

∵ د(س) = ٣٢ ∴ $٢^{س+١} = ٣٢$

∴ $٢^{س+١} = ٢^{٥}$ ∴ س + ١ = ٥

∴ س = ٤ ∴ مجموعة الحل = {٤}

حاول أن تحل

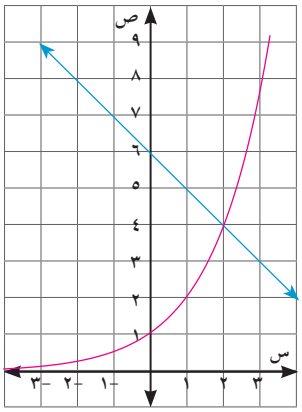
(٣) إذا كانت د(س) = $٧^{س}$، أوجد قيمة س التي تحقق د(س+١) = ٤٩

حل المعادلات الأسية بيانيًّا:

Solving the power equation grophically

مثال

٤ ارسم في شكل واحد المنحنى البياني لكل من الدالتين د١ حيث د١(س) = ٢^س ، د٢ حيث د٢(س) = ٦ - س ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة ٢^س = ٦-س



الحل

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
٢^س	١/٨	١/٤	١/٢	١	٢	٤	٨
٦ - س	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣

من الرسم: الإحداثي السيني لنقطة التقاطع يساوي ٢

∴ مجموعة حل المعادلة = {٢}

حاول أن تحل

٤ باستخدام أحد البرامج الرسومية (geogebra) ارسم في شكلٍ واحدٍ كُلًّا من الدالتين د١(س) = ٢^(س+١) ، د٢(س) = ٣ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة ٢^(س+١) = ٣.

مثال

٥ **الربط بالأحياء:** يتكاثر أحد الكائنات الدقيقة بطريقة الانقسام الثنائي بحيث تتضاعف عدد هذه الكائنات كل ساعة نتيجة انقسام كل خلية إلى خليتين، فإذا كان عدد الخلايا عند بداية القياس ٢٠ ألف خلية أوجد:

أ عدد الخلايا بعد مرور ٥ ساعات.

ب بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا ٢ مليون و ٥٦٠ ألف خلية.

الحل

يمكن كتابة عدد الخلايا على صورة دالةٍ أسية.

د(ن) = ب (أ)^ن

= ٢٠٠٠٠ (٢)^ن حيث ن عدد الساعات

أ عدد الخلايا بعد مرور ٥ ساعات (بوضع ن = ٥)

= ٢٠٠٠٠ × ٢^٥ = ٦٤٠٠٠٠ خلية

ب لإيجاد عدد الساعات التي يكون بعدها عدد الخلايا ٢ مليون و ٥٦٠ ألف خلية نضع د(س) = ٢٥٦٠٠٠٠

∴ ٢٠٠٠٠ (٢)^ن = ٢٥٦٠٠٠٠ بالقسمة على ٢٠٠٠٠

∴ ٢^ن = ١٢٨

∴ ٢^ن = ٢^٧

ومنها ن = ٧ ساعات.

تمـاريـن الدرس الثالث

(١) أكمل ما يأتى:

أ إذا كان ٥س$^{-٢}$ = ١ فإن س = ...

ب إذا كان ٣س$^{-٢}$ = ٧س$^{-٢}$ فإن س = ...

ج إذا كان ٢س$^{+١}$ = ٥س$^{+١}$ فإن ٣س$^{+١}$ = ...

د إذا كان ٢|س|^{٢} = ٣٢ فإن س = ...

هـ إذا قطع منحنى الدالة د$_١$ حيث د$_١$(س) = ٣^{س} منحنى الدالة د$_٢$ حيث د$_٢$(س) = ٤-س في نقطة (ك ، ٣) فإن مجموعة حل المعادلة ٣^{س} = ٤-س تساوي

(٢) اختر الاجابة الصحيحة من بين الأقواس

أ إذا كان ٣س$^{-٥}$ = ٩ فإن س = ... (٢ ، ٧ ، -٣ ، -٧)

ب إذا كان ٢^{س} = ٢٠ حيث ن < س < ن + ١ ، ن عدد صحيح فإن ن = ...
(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

ج إذا كان ٣^{س} = ٥ فإن ٣ س$^{+١}$ = ... (٥ ، ١٥ ، ٦ ، ٤٥)

د العدد ٥ س$^{+١}$ + ٥^{س} يقبل القسمة على لجميع قيم س الطبيعية.
(٧ ، ٦ ، ١٣ ، ١٧)

هـ إذا كان (٢/٣)س$^{-٢}$ = ٨/٢٨ فإن س = ... (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

و منحنيا الدالتان د(س) = ٢^{س} ، ر(س) = ٣^{س} يتقاطعان عند س = ...
(-١ ، ٠ ، ١ ، ٢)

(٣) أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ ٣ س$^{+٤}$ = ٩

ب ٢س$^{-٥}$ = ١/٣٢

ج ٥س$^{+٢}$ = ١

د ٣|س|^{٣} = ٣

هـ ٢ × ٣س$^{-٢}$ = ٥٤

و ٧س$^{-٥}$ = ٣س$^{-٥}$

ز ٢س$^{-٦}$ = ٥س$^{-٢}$

ح (٣/٢)س$^{-٢}$ = ٨/٢٧

ط ٢س × ٥$^{-س}$ = ٤/٢٥

ى ٤س = ٦٤

ك ٤$^{-س}$ = ١/٤

ل (-٣)س$^{-٥}$ = ١/٩

٤ أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل من المعادلات:

أ $٣^{س} = ٣$ ب $٢^{س+١} = ٥$ مقربًا الناتج لرقمٍ عشري واحدٍ

جـ $٣^{س+١} = -س$ د $٢^{س} = \frac{١}{٢}س + ١$

٥ إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات:

أ د(س) = ٨ ب د(س+١) = $\frac{١}{٣٢}$

٦ إذا كانت د(س) = $٣^{س+١}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

أ د(س) = ٢٧ ب د(س-١) = $\frac{١}{٩}$

٧ إذا كانت د(س) = $٧^{س-٢}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ:

أ د(س) = ٣٤٣ ب د(٢س) = $٤٩^{-١}$

٨ **اكتشف الخطأ:** قام كل من محمد وكريم بحلِّ المعادلة $٢ \times ٢^{س} = ١٦$

حل محمد

$٢ \times ٢^{س} = ١٦$

$\therefore ٤^{س} = ١٦$

$\therefore ٤^{س} = ٢^{٤}$

$\therefore س = ٢$

حل كريم

$٢ \times ٢^{س} = ١٦$

$\therefore ٢^{س} = \frac{١٦}{٢} = ٨$

$\therefore ٢^{س} = ٢^{٣}$

$\therefore س = ٣$

أي الحلين هو الصواب؟ ولماذا؟

٩ تتناقص أعداد الكائنات البحرية تبعًا لدالة التضاؤل الأسى ص = $٨١٩٢ (\frac{١}{٢})^{ن ÷ ١٠}$ حيث ن عدد الاسابيع بدءًا من الآن. أوجد:

أ عدد هذه الكائنات بعد مرور ٤ أسابيع من الآن

ب بعد كم أسبوع من الآن يصبح عدد هذه الكائنات ١٠٢٤

الوحدة الثانية

الدرس ٤

الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

Logarithmic function and its graphical representation

فكر و ناقش

تأمل المعادلات الأسية الآتية وحاول الإجابة على الأسئلة التالية:

$٢^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٣$ ، $٢^{ع} = ٤$

١- س = ... ، ع = ...

٢- قيمة ص محصورة بين عددين صحيحين متتاليين هما ،

تلاحظ أن قيمة ص لا يمكن حسابها مباشرة مثل س ، ع لذلك نحتاج إلى مفهوم الدالة اللوغاريتمية لحساب قيمة ص.

تعلم

الدالة اللوغاريتمية *Logarithmic function*

إذا كان س، أ عددين موجبين حيث أ ≠ ١ فإنَّ الدالة اللوغارتمية ص = لو$_{أ}$ س هي الدالة العكسية للدالة الأسية ص = $أ^{س}$

مثال: إذا كان لو$_{٢}$ ٣٢ = ٥ فإن $٢^{٥}$ = ٣٢ والعكس صحيح.

تعبير شفهي:

إذا كانت النقطة (جـ، ى) ∈ للدالة ص = $أ^{س}$ فإن:

١- النقطة(.....،) ∈ للدالة ص = لو$_{أ}$ س.

٢- الصورة الأسية $أ^{جـ}$ = ى تكافئ الصورة اللوغارتمية

مثال

التحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

(١) حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ) $٣^{٤} = ٨١$ ب) $٢٥^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٥}$ جـ) $١٠^{-٢} = ٠,٠١$

الحل

أ) لو$_{٣}$ ٨١ = ٤ ب) لو$_{٢٥}$ $\frac{١}{٥} = -\frac{١}{٢}$ جـ) لو$_{١٠}$ ٠,٠١ = -٢

سوف تتعلم

- تعريف الدالة اللوغارتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغارتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغارتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغارتمية البسيطة.

المصطلحات الأساسية

- لوغاريتم *logarithm*
- دالة عكسية *inverse function*
- مجال *domain*
- اللوغاريتم المعتاد *common logarithm*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

إرشادات للدراسة

تسمى لو$_{أ}$ س = ص بالصورة اللوغاريتمية

وتسمى $أ^{ص}$ = س بالصورة الأسية المكافئة لها.

فإذا كانت $(-٣)^{٤} = ٨١$

فإنه لا توجد صورة لوغاريتمية مكافئة لها.

حاول أن تحل

(١) عَبِّر عن كلٍّ مما يأتي بصورة لوغاريتمية:

أ $١٠^{٣} = ١٠٠٠$ ب $٨^{\frac{١}{٣}} = ٢$ ج $ب^{س} = ص$

اللوغاريتمات المعتاد *Common logarithm*

هو اللوغاريتم الذي أساسه ١٠ ويكتب بدون كتابة الأساس، أي لو ٧ = لو٧ ، لو ١٢٧ = لو ١٢٧ ويمكن استخدام مفتاح log الموجود بالحاسبة لإيجاد اللوغاريتم المعتاد لأي عدد.

مثال

(٢) حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة الأسية:

أ لو ٣٢ = ٥ ب لو ١٠٠٠ = ٣ ج لو ١ = صفر

الحل

أ $٣٢ = ٢^{٥}$ ب $١٠٠٠ = ١٠^{٣}$ ج $١ = ٢^{صفر}$

حاول أن تحل

(٢) حوِّل كلًّا مما يأتي إلى الصورة الأسية:

أ لو $\frac{٢}{٣} = ٢٥$ ب لو ٢ = ١٠٠ ج لو ١ = ٥

مثال

إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية

(٣) أوجد قيمة كُلٍّ من:

أ لو ١٢٥ ب لو ٠,٠١

الحل

أ نفرض لو ١٢٥ = س وبالتحويل إلى الصورة الأسية

∴ $٥^{س} = ١٢٥$ ∴ $٥^{س} = ٥^{٣}$ ومنها س = ٣

∴ لو ١٢٥ = ٣

ب نفرض لو ٠,٠١ = ص (لوغاريتم معتاد أساسه ١٠) وبالتحويل للصورة الأسية

∴ $١٠^{ص} = ٠,٠١$ ∴ $١٠^{ص} = ١٠^{-٢}$

منها ص = -٢ ∴ لو ٠,٠١ = -٢

أضف إلى معلوماتك

يمكن تحويل الصورة الأسية ذات الأساس الموجب فقط إلى صورة لوغاريتمية فمثلا:

$(-٣)^{٤} = ٨١$

لا يمكن تَحويلها إلى صورة لوغاريتمية.

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمة كل من:

أ لو$_{٣}$ ٨١ ب لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣٢

مثال

حل المعادلات

(٤) أوجد في ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٢}$ (س+٥) = ٣ ب لو$_{٥}$ ٦٢٥ = س - ١ ج لو$_{س}$ (س+٦) = ٢

الحل

أ المعادلة معرفة لكل قيم س + ٥ > صفر أي س > -٥ (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية

∴ س + ٥ = $٢^{٣}$ ∴ س + ٥ = ٨

ومنها س = ٣

∴ ٣ ∋ مجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٣}

ب المعادلة معرفة لجميع قيم س الحقيقية وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية.

∴ $٥^{س-١}$ = ٦٢٥ ∴ $٥^{س-١}$ = $٥^{٤}$

∴ س - ١ = ٤ ومنها س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

ج المعادلة معرفة لجميع قيم س التي تُحقِّق كلًّا من
- س + ٦ > صفر
- س > صفر
- س ≠ ١

أي أن مجال تعريف المعادلة هو]صفر ، ∞ [- {١}

وبتحويل المعادلة إلى الصورة الأسية:

$س^{٢}$ = س + ٦ $س^{٢}$ - س - ٦ = ٠

(س - ٣) (س + ٢) = ٠

إما س = ٣ أو س = -٢

وحيث إن س = -٢ ∉ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٣}

حاول أن تحل

(٤) أوجد في ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

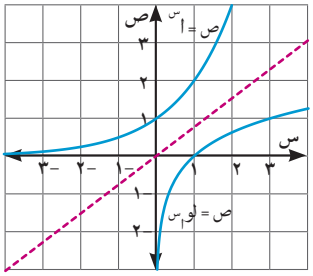
أ لو$_{٥}$ (٣س-١) = ١ ب لو$_{٣}$ ٢٧ = س + ٢ ج لو$_{(س-١)}$ ٩ = ٢

تعلم

التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتيمة

graphical representation of the logarithmic function

إذا كانت د(س) = $أ^{س}$ حيث أ ∈ ع$^{+}$ -{١} فإن الدالة العكسية للدالة د تسمى بالدالة اللوغاريتمية أى ص = لو$_{أ}$ س



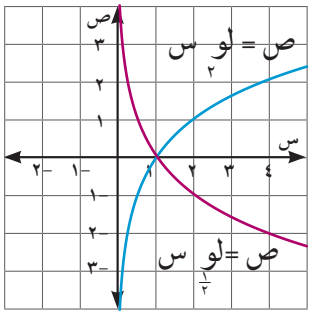
مثال

٥ ارسم فى شكل واحد منحنى كلٍّ من الدالتين ص = لو$_{٢}$ س، ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

الحل

نختار قيم س قوى العدد ٢ (الأساس) { ٢$^{-٢}$ ، ٢$^{-١}$، ٢^{٠}، ٢^{١}، ٢^{٢}}

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
لو$_{٢}$ س	٢-	١-	صفر	١	٢
لو$_{\frac{١}{٢}}$ س	٢	١	صفر	١-	٢-



من الرسم يمكنك استنتاج الخواص الآتية لمنحنى الدالة اللوغاريتمية

المجال = ع+ ، المدى = ع

الدالة ص = لو$_{أ}$ س متزايدة لكل أ > ١ ومتناقصة لكل ٠ < أ < ١

حاول أن تحل

٥ مثل بيانيًّا منحنى الدالة ص = لو$_{٣}$ س ومن الرسم أوجد المدى وابحث اطرادها.

مثال

٦ تطبيقات حياتية: تطبق إحدى الدول نظامًا ضريبيًّا بحيث يدفع الممول الضريبة المستحقة سنويًّا وفقًا للدالة

د(س) = { ١٠٪ س عندما س ⩽ ٥٠٠٠ ؛ ١٠٪س + ١٠٠ لو (س - ٤٩٩٩) عندما س > ٥٠٠٠ }

حيث س هى صافى الربح السنوى

أوجد

أ الضريبة المستحَقَّة على أحد الممولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٣٦٠٠ جنيه.

ب الضريبة المستحَقَّة على أحد الممولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٨٠٠٠ جنيه.

الحل

أ د(٣٦٠٠) = ١٠٪ × ٣٦٠٠ = ٠,١ × ٣٦٠٠ = ٣٦٠ جنيه

ب د(٨٠٠٠) = ١٠٪ × ٨٠٠٠ + ١٠٠ لو (٨٠٠٠ - ٤٩٩٩) = ١١٤٧,٧ جنيه

٩ حاول أن تحل

٦ إذا كانت أ تعبر عن المبلغ المصروف على الدعاية لأحد الشركات فى السنة كان ص يُعبِّر عن المبلغ الذى تتحصَّل عليه الشركة بعد مبيعات هذه السنة حيث ص = ١٠^٤ [١ + ٢ لو (أ/١٠٠ + ١)] احسب ص عندما أ = ١١٠٠ جنيه.

تمارين الدرس الرابع

١ أكمل ما يأتى:

أ الصورة الأسية المكافئة للصورة لو_٣ ٢٧ = ٣ هى

ب الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة ٣^صفر = ١ هى

جـ لو ٠,٠٠١ = ...

د لو_٢ ١ = ...

هـ إذا كان لو ٤ = ٢ فإن س = ...

و إذا كان لو_٢ ١٢٨ = س + ١ فإن س = ...

ز مجال الدالة د(س) = لو_٢ س هو

ح الدالة د حيث د(س) = لو_أ س متناقصة لكل أ ∈

ط منحنى الدالة د حيث د(س) = لو_٢ س يمر بالنقطة (٨،)

ى إذا كان لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن لو ١٥ = ... (بدلالة س،ص)

٢ أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:-

أ لو_٣ (س - ١) = ٢

ب لو_٥ (س + ٢) = ٣

جـ لو_س ٩ = ٢/٣

د لو_(س+١) ٨ = ٣/٤

هـ لو_س (س + ٢) = ٢

و لو_س ٩ = ٢

٣ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

أ لو_٥ ١

ب لو_٧ ٧

جـ لو_٣ ٩

د لو_٦ ٣ + لو_٦ ٢

٤ مثل بيانيًّا الدالة د فى كل مما يأتى الآتية ومن الرسم أوجد مداها وابحث اطرادها:

أ د(س) = لو_٢ س

ب د(س) = لو_٣ س

جـ د(س) = لو_١/٢ س

د د(س) = لو_١/٣ (س + ١)

٥ استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كلٍّ من:-

أ لو ١٥

ب لو_٢ ٢٧

جـ ٤لو ٧ - ٥لو ١٣

٦ إذا كانت مصاريف الاشتراك السنوى بالجنيه لأسرة فى أحد النوادى الاجتماعية تتبع العلاقة س = ٥٠٠ + ١٠٠لو (ن س) حيث ن عدد سنوات الاشتراك س عدد الأفراد. أوجد قيمة اشتراك أسرة مكونة من ٥ أفراد للسنة الرابعة فى هذا النادى.

بعض خواص اللوغاريتمات
Some properties of logarithms

تَعلَّمت فى الدرس السابق معنى اللوغاريتم وكيفية تمثيل الدالة اللوغاريتمية بيانيًّا وفيما يلى ندرج بعض خواص اللوغاريتمات التى تُساعد فى تبسيط المقادير اللوغاريتمية أو حل المعادلات التى تَحتوى على لوغاريتم.

سوف تتعلم
- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية
- معادلة لوغاريتمية.
logarithmic equation

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية

تعلم

بعض خواص اللوغاريتمات
Some properties of logarithms

إذا كان أ ∈ ع$^+$ - {١} ، س ، ص ∈ ع$^+$ فإن

١- لو$_{أ}$ أ = ١

فمثلًا لو$_{٣}$ ٣ = ١ ، لو$_{١٠}$ ١٠ = ١

٢- لو$_{أ}$ ١ = صفر

فمثلا لو$_{٥}$ ١ = صفر ، لو$_{أ}$ ١ = صفر

حاول إثبات كل من **١** ، **٢** من تعريف اللوغاريتم

٣- خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص حيث س، ص ∈ ع$^+$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع ب = لو$_{أ}$ س ، جـ = لو$_{أ}$ ص

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ}

فتكون س ص = أ^{ب} × أ^{جـ} **أي أن** س ص = أ$^{ب + جـ}$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: لو$_{أ}$ س ص = ب + جـ

وبالتعويض عن قيمتي ب، جـ تكون لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

مثال

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو$_{٣٤}$ ٢ + لو$_{٣٤}$ ١٧

الحل

المقدار = لو$_{٣٤}$ (٢ × ١٧) استخدام خاصية (٣)

= لو$_{٣٤}$ ٣٤

= ١ استخدام خاصية (١)

حاول أن تحل

(١) إذا كان لو$_{٢}$ ٧ ≃ ٢,٨ ، لو$_{٢}$ ١٣ ≃ ٣,٧ أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة لو$_{٢}$ ٩١

٤- خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

لو$_{ا}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{ا}$ س - لو$_{ا}$ ص (حاول بنفسك إثبات صحة العلاقة)

مثال

(٢) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٥٠ - لو ٥

الحل

المقدار = لو $\frac{٥٠}{٥}$ استخدام خاصية القسمة

= لو ١٠

= ١ استخدام خاصية (١)

حاول أن تحل

(٢) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو$_{٢}$ ٧ - لو$_{٢}$ ٣,٥

٥- خاصية لوغاريتم القوة:

لو$_{ا}$ س^{ب} = ب لو$_{ا}$ س حيث س > ٠ (حاول إثبات صحة العلاقة بنفسك)

مثال

(٣) بدون استخدامِ الحاسبة أوجد قيمة لو$_{٥}$ ١٢٥

الحل

المقدار = لو$_{٥}$ ٥^{٣}

= ٣ لو$_{٥}$ ٥ استخدام خاصية القوة

= ٣ × ١ استخدام خاصية (١)

= ٣

حاول أن تحل

(٣) أوجد فى أبسط صورة لو$_{٣٦}$ ٢٧

(٤) تفكير ناقد: هل مجال الدالة د(س) = لو$_{ا}$ س^{٢} هو نفسه مجال الدالة ر(س) = ٢لو$_{ا}$ س ؟ فسر إجابتك

٦ - خاصية تغيير الأساس

$$\text{لو}_{\text{ص}} \text{ س} = \frac{\text{لو}_{\text{ا}} \text{ س}}{\text{لو}_{\text{ا}} \text{ ص}}$$ وإثبات صحة هذه الخاصية

بوضع: ع = $\text{لو}_{\text{ص}}$ س

ص$^{\text{ع}}$ = س بالتحويل إلى الصورة الأسية

ع $\text{لو}_{\text{ا}}$ ص = $\text{لو}_{\text{ا}}$ س يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ا

فتكون ع = $\frac{\text{لو}_{\text{ا}} \text{ س}}{\text{لو}_{\text{ا}} \text{ ص}}$ أي أن: $\text{لو}_{\text{ص}}$ س = $\frac{\text{لو}_{\text{ا}} \text{ س}}{\text{لو}_{\text{ا}} \text{ ص}}$

مثال

(٤) اختصر لأبسط صورة $\text{لو}_{٧}$ ١٦ × $\text{لو}_{٢}$ ٤٩

الحل

المقدار = $\frac{\text{لو}\ ١٦}{\text{لو}\ ٧} \times \frac{\text{لو}\ ٤٩}{\text{لو}\ ٢}$ استخدام خاصية (٦)

= $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٤^{٢}}{\text{لو}_{٧}\ ٧} \times \frac{\text{لو}_{٧}\ ٧^{٢}}{\text{لو}_{٢}\ ٢}$

= $\frac{٤\ \text{لو}_{٢}\ ٢}{\text{لو}_{٧}\ ٧} \times \frac{٢\ \text{لو}_{٧}\ ٧}{\text{لو}_{٢}\ ٢}$ استخدام خاصية (٥)

= ٤ × ٢ = ٨

حاول أن تحل

(٥) أوجد حل المثال السابق بتغيير الأساس لعدد آخر غير ١٠

٧ - خاصية المعكوس الضربى

$\text{لو}_{\text{ب}}$ ا = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{ب}}$ أىْ أنَّ كلًّا من $\text{لو}_{\text{ب}}$ ا ، $\text{لو}_{\text{ا}}$ ب ، معكوس ضربى للآخر (حاول إثبات صحة العلاقة)

مثال

(٥) أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة $\frac{١}{\text{لو}_{٣}\ ١٥} + \frac{١}{\text{لو}_{٥}\ ١٥}$

الحل

المقدار = $\text{لو}_{١٥}$ ٣ + $\text{لو}_{١٥}$ ٥ استخدام خاصية (٧)

= $\text{لو}_{١٥}$ (٣ × ٥) استخدام خاصية (٣)

= $\text{لو}_{١٥}$ ١٥ = ١ استخدام خاصية (١)

حاول أن تحل

٦ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\ ٣٠} + \frac{١}{\text{لو}_{٣}\ ٣٠} + \frac{١}{\text{لو}_{٥}\ ٣٠}$

تبسيط المقادير اللوغاريتمية *Simplifying the logaritmic experssions*

مثال

٦ اختصر لأبسط صورة لو ٠,٠٠٩ - لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + ٣ لو $\frac{٥}{٢}$ - لو $\frac{١}{١٢}$

الحل

المقدار = لو $\frac{٩}{١٠٠٠}$ - لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو $(\frac{٥}{٢})^{٣}$ - لو $\frac{١}{١٢}$ خاصية (٥)

= لو $(\frac{٩}{١٠٠٠} \times \frac{١٦}{٢٧} \times \frac{١٢٥}{٨} \times \frac{١٢}{١})$ خاصية (٣) ، (٤)

= لو ١ = صفر خاصية (٢)

حاول أن تحل

٧ اختصر لأبسط صورة ٤ لو $\sqrt{٣}$ - لو $\frac{٢}{٥}$ ١ - لو $\frac{٩}{٧}$ - لو $\frac{١}{٢}$

حل المعادلات اللوغاريتمية *Solving Logarithmic equations*

مثال

٧ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات

أ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ١) = ١ ب لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = ٣

الحل

أ الدالة معرفة لكلٍّ س > صفر ، س + ١ > صفر

أي أن س > صفر (مجال تعريف المعادلة)

∴ لو$_{٢}$ س (س + ١) = ١ استخدام خاصية (٣)

∴ س (س+١) = ٢^{١} تحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

∴ س^{٢} + س - ٢ = صفر ∴ (س + ٢) (س - ١) = صفر

إما س = -٢ أو س = ١ وحيث إن س = -٢ ∉ لنطاق تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {١}

ب الدالة معرفة لكل س > صفر (نطاق تعريف المعادلة)

∴ لو$_{٢}$ س + $\frac{\text{لو}_{٢}\ س}{\text{لو}_{٢}\ ٤}$ = ٣ خاصية (٦)

$$\text{لو}_{٢}\ س + \frac{\text{لو}_{٢}\ س^{٢}}{٢} = ٣$$ بالضرب فى ٢

∴ ٢لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ س = ٦ ∴ ٣ لو$_{٢}$ س = ٦ ∴ لو$_{٢}$ س = ٢

∴ س = ٤ (التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية)

وحيث إن س = ٤ ∋ مجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٤}

حاول أن تحل

(٨) أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية :

أ لو (٢ س + ١) - لو (٣ س - ١) = ١ ب لو$_{٢}$ س = لو$_{س}$ ٢

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

Solving the power equations by using Logarithms

مثال

(٩) أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

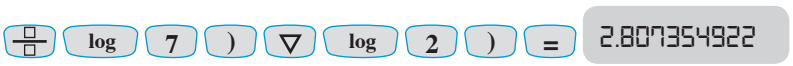
أ ٢^{س} = ٧ ب ٣$^{س+١}$ = ٥$^{س-٢}$

الحل

أ ٢^{س} = ٧ بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو ٢^{س} = لو ٧ ∴ س لو ٢ = لو ٧ ∴ س = $\frac{\text{لو}\ ٧}{\text{لو}\ ٢}$

وباستخدام الحاسبة بالتتابع الآتى:



∴ س ≃ ٢,٨١ ∴ مجموعة الحل = {٢,٨١}

(التحقق من صحة الإجابة باستخدام الحاسبة)



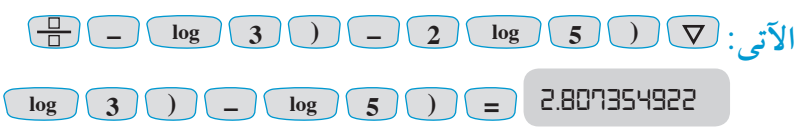
ب ٣$^{س+١}$ = ٥$^{س-٢}$ بأخذ لو للطرفين

∴ (س + ١) لو ٣ = (س - ٢) لو ٥ ∴ س لو ٣ + لو ٣ = س لو ٥ - ٢ لو ٥

∴ س لو ٣ - س لو ٥ = - لو ٣ - ٢ لو ٥ ∴ س (لو ٣ - لو ٥) = - لو ٣ - ٢ لو ٥

∴ س = $\frac{-\text{لو}\ ٣ - ٢\ \text{لو}\ ٥}{\text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٥}$

وباستخدام الحاسبة بالتتابع الآتى:



∴ س ≃ ٨,٤٥ ∴ مجموعة الحل = {٨,٤٥}

(التحقق من صحة الإجابة باستخدام الحاسبة)

ا	=	2	−	ans	$x^{\blacksquare}$	5	÷	▷	1	+	ans	$x^{\blacksquare}$	3

حاول أن تحل

(٨) أوجد لأقرب رقمين عشريين مجموعة حل كلٍّ من المعادلات :

أ) $٧^{س} = ٢$ ب) $٤ س^{-١} = ٣س$

مثال

(١٠) **الربط بالصناعة:** إذا كانت كفاءة عمل أحد الآلات تتناقص سنويًّا طبقًا للعلاقة ك = $(٠,٩)^{ن}$ ك ٠ حيث ك كفاءة الآلة، ك ٠ الكفاءة الابتدائية للآلة ، ن عدد سنوات عمل الآلة. فإذا عُلِمَ أنَّ الآلة تتوقف عن العمل إذا بلغت كفاءتها ٤٠٪ فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة قبل أنْ تتوقف عن العمل.

الحل

المقصود ببلوغ الكفاءة ٤٠٪ أى ٤٠٪ من الكفاءة الابتدائية

∴ ٠,٤ ك ٠ = $(٠,٩)^{ن}$ ك ٠ بالقسمة على ك ٠

∴ ٠,٤ = $(٠,٩)^{ن}$ فأخذ لو للطرفين

∴ لو ٠,٤ = ن لو ٠,٩ ∴ ن = $\frac{\text{لو } ٠,٤}{\text{لو } ٠,٩}$ = ٨,٦٩٦٧١٨

أىْ أنَّ الآلة لا تعمل أكثر من ٨ سنوات ونصف السنة .

حاول أن تحل

(٩) فى المثال السابق أوجد كفاءة الآلة بعد مرور ٤ سنوات من تشغيلها

تمارين الدرس الخامس

(١) اختر الاجابة الصحيحة من بين الاختيارات:

أ) لو $٨^{٢}$ = ...

(١) ٤ (٢) ٣ (٣) ١٦ (٤) ١٠

ب) لو ٢ + لو ٥ = ...

(١) ١ (٢) لو ٧ (٣) لو ٢,٥ (٤) ١٠

ج) لو $\sqrt[٥]{٥}$ = ...

(١) ٢ (٢) ٥ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) ١-

د) إذا كان لو ٢ = س ، لو ٣ = ص فإنَّ لو ٦ = ...

(١) س + ص (٢) س ص (٣) س - ص (٤) لوس + لو ص

هـ) $٢ \text{ لو}_{٦} ٢ + ٢ \text{ لو}_{٦} ٣ =$

(١) ٦ (٢) ٣٦ (٣) ٢ (٤) ١٢

و) $\text{لو}_{٢} ٥ \times \text{لو}_{٥} ٢ =$

(١) ١ (٢) ١٠ (٣) $\frac{٥}{٢}$ (٤) صفر

ز) $\text{لو}_{٥} ٢ \times \text{لو}_{٣} ٥ \times \text{لو}_{٢} ٣ =$

(١) ٣٠ (٢) ١ (٣) صفر (٤) لو ٣٠

(٢) عَبِّر عن كلٍّ ممايأتى بدلالة لوس ، لو (س + ١)

أ) لو س (س+١) ب) لو $\frac{\text{س}}{\text{س}+١}$ جـ) لو$\sqrt{\text{س}}$ (س+١)^{٢}

(٣) اختصر لأبسطِ صورة:

أ) $\text{لو}_{٦} ٥٤ - \text{لو}_{٦} ٩$ ب) $\text{لو}_{٦} ٢ + \text{لو}_{٦} ٣$ جـ) $\text{لو}_{٢} ١٢ + \text{لو}_{٢} \frac{٢}{٣}$

د) لو ٤٨ + لو ١٢٥ - لو ٦ هـ) $\frac{١ - \text{لو}٢}{\text{لو}١٢٥}$ و) $\frac{\text{لو}٤٩ + ٣ \text{ لو}٧}{\text{لو}٧}$

ز) $\text{لو}_{٢} ١٦ + \text{لو}_{٣} \sqrt{٣} + \text{لو}_{٣} ٠,١$ ح) $\frac{١}{٢} \text{لو}_{٣} أ + \frac{١}{٢} \text{لو}_{٣} ب + ٢ \text{ لو}_{٣} جـ - \text{لو}_{٣} \sqrt{أب}$ - لو $٣جـ^{٢}$

(٤) أوجد فى ع مجموعة حلّ كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ) $\text{لو}_{٢} \text{س} + \text{لو}_{٢} (\text{س}+٢) = ٣$ ب) لو س + لو (س -٣) = ١ جـ) $\text{لو}_{٥} \text{س} - \text{لو}_{٥} ٢ = ٢$

د) لو (س+٣) - لو ٣ = لو س هـ) $\frac{١}{\text{لو}_{٢} \text{س}} + \frac{١}{\text{لو}_{٣} \text{س}} = ٢$ و) لو س - $\frac{٣}{\text{لوس}} = ٢$

(٥) أثبت أنَّ $\text{لو}_{ب} أ \times \text{لو}_{جـ} ب \times \text{لو}_{ء} جـ \times \text{لو}_{أ} ء = ١$ ثم احسب قيمة $\text{لو}_{٢} ٣ \times \text{لو}_{٣} ٥ \times \text{لو}_{٥} ١٦$

(٦) أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

أ) $٣^{\text{س}} = ٧$ ب) $٥^{\text{س}-١} = ٢$ جـ) $٤ \times ٧^{\text{س}-٢} = ١$ د) $٢^{\text{س}-٣} = ٣^{\text{س}+١}$

(٧) إذا كانت العلاقة بين شدة التيار (ت) أمبير والزمن (ن) ثانية تُعطى بالصيغة ت = $(\frac{١}{٢})^{\text{ن}}$ احسب الزمن إذا كانت شدة التيار ٠,٣٢ أمبير.

(٨) الربط بالاحياء: إذا كان حجم عينة من البكتريا فى لحظة معينة هو ٣×١٠^{٦} وكان حجم العينة يزداد تبعًا لدالة أسية ح = $٣ \times ١٠^{٦} (١,١٥)^{\text{ن}}$ فأوجد حجم البكتريا بعد ٤ ساعات.

مُلخَّصُ الوَحْدَة

١- الجذور النونية الحقيقية للعدد أ

بفرض أ عدد حقيقى، ن عدد صحيح حيث (ن > ١)

	ن عدد صحيح زوجى	ن عدد صحيح فردى
➢ أ > صفر	أ ليس لها جذور نونية حقيقية	أ لها جذر نونى حقيقي هو $\sqrt[ن]{أ}$ = $أ^{\frac{١}{ن}}$
➢ أ = صفر	أ لها جذر نونى حقيقي هو $\sqrt[ن]{صفر}$ = صفر	أ لها جذر نونى حقيقي هو $\sqrt[ن]{صفر}$ = صفر
➢ أ < صفر	أ لها جذران حقيقيان هما $\pm\sqrt[ن]{أ}$ = $\pm أ^{\frac{١}{ن}}$	أ لها جذر نونى حقيقي هو $\sqrt[ن]{أ}$ = $أ^{\frac{١}{ن}}$

٢- خواص الجذور النونية:

إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ ∈ ع **فإن:**

(أ) $\sqrt[ن]{أب}$ = $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

(ب) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$ = $\frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث ب ≠ صفر

(ج) $\sqrt[ن]{أ^{م}}$ = $(\sqrt[ن]{أ})^{م}$

(د) $\sqrt[ن]{أ^{ن}}$ = أ إذا كان ن عدد فردى، $\sqrt[ن]{أ^{ن}}$ = |أ| إذا ن عدد كان زوجى

٣ الأسس الكسرية $أ^{\frac{م}{ن}}$ = $\sqrt[ن]{أ^{م}}$ حيث $\sqrt[ن]{أ^{م}}$ ∈ ع

٤ خواص الأسس الكسرية

(أ) $أ^{\frac{م}{ن}}$ = $\sqrt[ن]{أ^{م}}$ حيث أ = ع، ن ∈ صـ - {١}، م ∈ صـ

(ب) يمكن تعميم قوانين القوى الصحيحة على القوى الكسرية

٥ الدالة الأسية: إذا كانت د: ع ⟵ ع+ حيث د(س) = $أ^{س}$ لكل أ ∈ ع+ - {١} فإن د تسمى دالة أسية أساسها أ

٦ خواص منحنى الدالة الأسية

(أ) مجال الدالة = ع (ب) المدى ح+

(ج) الدالة متزايدة على مجالها لكل أ > ١ وتسمى بدالة النمو الأسى.

(د) الدالة متناقصة على مجالها لكل ٠ < أ < ١ وتسمى بدالة التضاؤل الأسى.

٧ النمو الاسى: يمكن استخدام الدالة د حيث د(س) = أ(١ + ر)^{ن} لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة

٨ التضاؤل الأسى: يمكن استخدام الدالة د حيث د(س) = أ (١ - ر)^{ن} = لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى الفترات زمنية متساوية حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة.

٩ المعادلة الأسية:

إذا كان $أ^{ب} = أ^{جـ}$ حيث $أ \neq \{٠، ١، -١\}$ فإن م = ن

إذا كان $أ^{ب} = ب^{ب}$ حيث $أ، ب \neq \{٠، ١، -١\}$ فإن

إما ن = صفر **أو** أ = ب فى حالة ن عدد فردى **أو** أ = | ب | فى حالة ن عدد زوجى.

١٠ الدالة اللوغاريتمية

أ إذا كانت $أ \in ع_+ - \{١\}$ فإن الدالة ص = $لو_{أ}$ س هى الدالة العكسية للدالة الأسية ص = $أ^{س}$

ب $أ^{ب}$ = جـ فإن ب = $لو_{أ}$ جـ التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.

جـ اللوغاريتم المعتاد : هو لوغاريتم أساسه ١٠ {لاحظ أن $لو_{١٠}$ ٥ = لو ٥ }

١١ خواص الدالة اللوغاريتمية

أ مجال الدالة = $ع_+$

ب المدى = ع

جـ الدالة ص = $لو_{أ}$ س متزايدة لكل أ > ١ ومتناقصة لكل ٠ < أ < ١

١٢ خواص اللوغاريتمات : إذا كانت $أ \in ع_+ - \{١\}$

أ $لو_{أ}$ أ = ١

ب $لو_{أ}$ ١ = صفر

جـ $لو_{أ}$ $س^{م}$ = م $لو_{أ}$ س حيث س > صفر

د $لو_{أ}$ س + $لو_{أ}$ ص = $لو_{أ}$ س ص حيث س، ص > صفر

هـ $لو_{أ}$ س - $لو_{أ}$ ص = $لو_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ حيث س، ص > صفر

و $لو_{أ}$ س = $\frac{لو_{ب} س}{لو_{ب} أ}$ حيث س > صفر ، أ، ب $\in ع_+ - \{١\}$

ز $لو_{أ}$ س × $لو_{س}$ أ = ١

١٣ حل المعادلة الاسية باستخدام اللوغاريتمات

إذا كان $أ^{س}$ = ب فإن س = $\frac{لو ب}{لو أ}$

تمـــارين عامة

(١) أكمل ما يأتى:

أ إذا كان $س^{٤} = ١٦$ فإن س = ...

ب $٤^{\frac{١}{٢}}$ = ...

ج إذا مر منحنى الدالة ص = $أ^{س}$ بالنقطة (-٤، ١٦) فإن أ = ...

د لو ١٠٠٠ = ...

هـ الدالة د حيث د(س) = $أ^{س}$ تكون متناقصة لجميع قيم س عندما أ ∋

و منحنى الدالة د(س) = $٢^{س}$ هو صورة منحنى الدالة بالانعكاس فى المستقيم ص = س

ز منحنى الدالة ص = $٣^{س}$ هو صورة منحنى الدالة بالانعكاس فى محور الصادات.

ح إذ كان $٥ س^{-٢} = ٣ س^{-٢}$ فإن $٧س^{-٢}$ = ...

ط منحنى الدالة د حيث د(س) = $٢^{س+١}$ يقطع محور الصادات فى النقطة

ى إذا كان $لو_{٢} س = ٣$ فإن $لو_{٨} س$ = ...

ك $لو_{٢} ٣ \times لو_{٥} ٢ \times لو_{٣} ٥$ = ...

ل $\frac{١}{لو_{٢} ١٤} + \frac{١}{لو_{٧} ١٤}$

(٢) أوجد أبسط صورة:

أ $٢٧^{\frac{١}{٣}}$ ب $(\sqrt[٣]{٢١٠})^{-\frac{٢}{٣}}$ ج $لو_{٢} \frac{٣}{٢} + لو_{٢} \frac{٨}{٣}$

د $\frac{\sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{٤}}{\sqrt[٣]{٢}}$ هـ $لو_{٣} ٥ \times لو_{٥} ٣$ و $لو_{٢} ٤٠ - لو_{٢} ٥$

(٣) أوجد فى ح مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ ب $٣ س^{-٢} = \frac{١}{٨١}$ ج $لو_{س} (س + ٦) = ٢$

د $لو_{٥} \frac{١}{س} = -٢$ هـ $لو_{٢} (س - ١) - لو_{٢} (س - ٢) = ٢$ و $٣ س^{+١} = ٤$

٤ استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة $\frac{٧^{٢٨٥} \times ٤^{٢٠٠}}{٨^{٤٠٠}}$ مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

٥ مثل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٢ س$^{-١}$ ب ر(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ جـ هـ(س) = لو$_{٢}$ س د و(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ (س - ١)

الربط بالاقتصاد:

٦ يزداد سعر إحدى السلع المعمرة سنويًّا بمقدار ٩٪ فإذا كان السعر الأصلى للسلعة هو ١٠٠٠ جنيه.

أ أوجد صيغة توضِّح بها سعر السلعة بعد مرور ن سنة.

ب بعد كم سنه يصبح سعر السلعة ضعف سعرها الآن.

٧ تتناقص أعداد أحد أنواع الحيوانات فى إحدى الدول طبقًا لتضاؤل أسى فإذا كانت أعداد هذا الحيوان فى عام ١٩٦٠ تساوى ٨٠٥٤٠ ثم تضاءل هذا العدد عام ٢٠٠٠ ليصبح ٥٣٨٧٩.

أ اكتب صيغة توضح بها أعداد هذا الحيوان بعد مرور ن سنة من عام ١٩٦٠.

ب أوجد أعداد هذا الحيوان عام ١٩٨٥.

جـ إذا استمر تضاؤل أعداد هذا الحيوان بهذا المعدل ففى أى عام تتوقع أن تصل أعداد هذا الحيوان إلى نصف ما هو عليه عام ١٩٦٠.

٨ إذا كان لو٢ = ٠,٣٠١، لو٣ = ٠,٤٧٧ أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة

أ لو٦ ب لو $\frac{٣}{٢}$ جـ لو٥

٩ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ ٢^{س} = ٥ ب ٣$^{س+١}$ = ٧ جـ $(\frac{٢}{٣})^{س-٢}$ = ٩

د ٥$^{س-١}$ = ٣ هـ ٣$^{س-٢}$ = ٨$^{س-١}$ و ٢ × ٥^{س} = ٧

١٠ إذا كانت د(س) = ٣^{س}

أ أثبت أنَّ د(أ) × د(ب) = د(أ + ب) ب أوجد مجموعة حل المعادلة د(س + ١) = $\frac{١}{٩}$

١١ أوجد بيانيًّا مجموعة حل المعادلة ٢^{س} = ١ - $\frac{١}{٢}$ س

اختبار تراكمى

١ عَيِّن مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

أ $د(س) = \sqrt{٨ س - ٢}$ ب $د(س) = \frac{س - ٢}{س}$ ج $ر(س) = لو_{٣} (س - ٢)$

٢ ارسم منحنى كلٍّ مما يأتى، ومن الرسم عَيِّن المدى وابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية.

أ $د(س) = (س - ٢)^{٢}$ ب $د(س) = ٣س - ١$

ج $ر(س) = |س| - ٢$ د $هـ(س) = ١ - لو_{٢} س$

٣ اختصر:

أ $\frac{\sqrt{٨ أ} \times \sqrt[٣]{أ^{-٢}}}{\sqrt{أ}}$ ب $(١٢٥)^{\frac{٢}{٣}} \times (٨١)^{\frac{١}{٤}} \times (١٥)^{-١}$

٤ أوجد قيمة كلٍّ مما يأتى (بدون استخدام الحاسبة)

أ $(١٦)^{\frac{١}{٤}}$ ب $\sqrt[٣]{٢٧^{-٢}}$ ج $(٣^{-١})^{٢} \times ٩ \times (\sqrt{١٥})^{٠}$ صفر

د $لو ٥ + لو \frac{١}{٥}$ هـ $لو_{٩} \frac{١}{٢٧}$ و $٣لو_{٣} ٥$

٥ أوجد فى ع مجموع حل كلٍّ من المعادلات:

أ $|س - ٢| = ٥$ ب $٣س^{-٢} = \frac{١}{٣}$

ج $س^{-٤} = \frac{١}{١٦}$ د $لو س = لو ٣ + لو ١٠$

٦ أوجد باستخدام الحاسبة

أ قيمة س التى تُحقق $٣ س^{-٢} = ٢٥$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين

ب قيمة $\frac{٣ \times ٧٥٠}{٥ \times ٥١٠}$

٧ أيُّ الدوال الآتيةُ تمثل دالة نمو وأيها تُمثل دالة تضاؤل:

أ $ص = ٣ (١,٠٥)^{س}$ ب $ص = ١٠ (٢,١)^{س + ١}$

ج $ص = ٠,٤ (\frac{١}{٢})^{س}$ د $ص = ٠,٢ (٣)^{١ - س}$

الوحدة الثالثة

النهايات

Limits



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مقدمة في النهايات.
- يتعرف بعض الكميات غير المعنية مثل:

$$\frac{0}{0}\ ،\ \frac{\infty}{\infty}\ ،\ \infty - \infty\ ،\ 0 \times \infty$$

- يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:

بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب في المرافق.

- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim_{س \to ا} \frac{س^ن - ا^ن}{س - ا} = ن\ ا^{ن-1}$
- يستنتج نهاية دالة مستخدمًا القانون $\lim_{س \to ا} \frac{س^ن - ا^ن}{س^م - ا^م} = \frac{ن}{م}\ ا^{ن-م}$
- يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقرير قيمة النهاية.

المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة	*Unspecified quantity*	نهاية دالة	*Limit of a function*
غير معرف	*Undefined*	تعويض مباشر	*direct substitution*
نهاية يمنى	*Right limit*	دالة كثيرة الحدود	*Polynomial function*
نهاية يسرى	*Left limit*	نهاية الدالة عند اللانهاية	*Limit of a function at infinity*

دروس الوحدة

الدرس الأول: مقدمة فى النهايات.

الدرس الثانى: إيجاد نهاية الدالة جبريًّا.

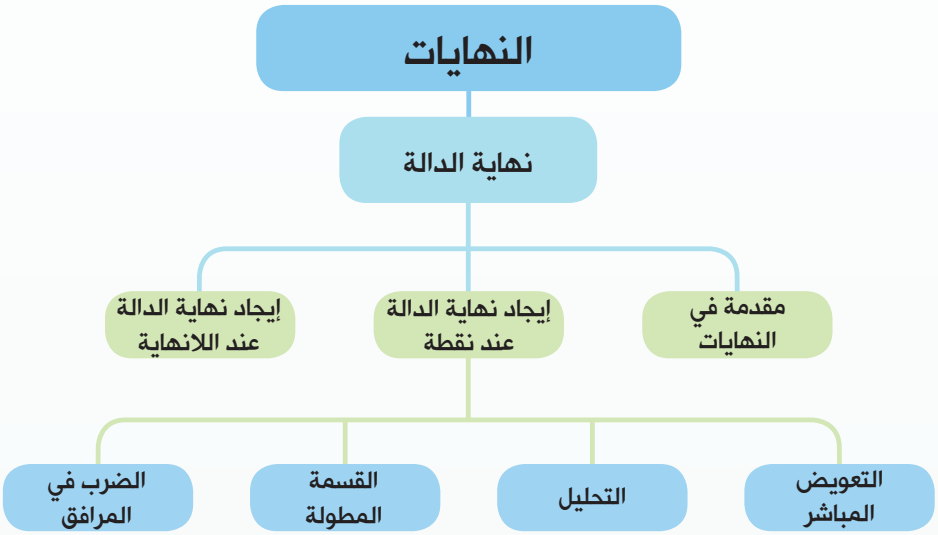
الدرس الثالث: نهاية الدالة عند اللانهاية.

مقدمة الوحدة

التفاضل والتكامل (Calculus) أحد الفروع الحديثة لمادة الرياضيات، والتى تختص بدراسة النهايات والاتصال والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير فى الدوال وتحليلها.

ويدخل علم التفاضل والتكامل فى العديد من التطبيقات الهندسية والحياتية والتجارية والعلوم المختلفة، فكثيرًا ما نحتاجه لدراسة سلوك الدالة، والتغير فيها وحل بعض المشكلات التى يعجز علم الجبر وبعض العلوم الأخرى عن حلها.

مخطط تنظيمى للوحدة



مقدمة في النهايات

Introduction to limits of functions

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

- كمية غير معينة *Unspecified quantities*
- غير معرف *Undefined*
- مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة *Extended real numbers*
- نهاية يمنى *Right limit*
- نهاية يسرى *Left limit*
- قيمة دالة *Value of a function*
- نهاية دالة *Limit of a function*

الأدوات المستخدمة

- ألة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

فكر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتيةإن أمكنك ذلك:

(١) ٣×٥ (٢) $٢٨ \div ٤$

(٣) $٤ - ٩$ (٤) $٧ \div ٠$

(٥) $٠ \div ٠$ (٦) $\infty + ٣$

(٧) $\infty \div \infty$ (٨) $\infty - \infty$

تذكر أن

∞ هى رمز يدل على عدد أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله

الكميات غير المعينة: *Unspecified quantities*

تعلم

فى بند فكِّر وناقش نجد أنَّ بعض نواتج العمليات محدد تمامًا مثل رقم ١ ، ٢ ، ٣ ، بينما بعض النواتج لايمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

لاحظ أنَّ: $٧ \div ٠$ غير معرفة حيث إن القسمة على صفر لا معنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية $٠ \div ٠$

حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضُرب كلٌّ منها فى صفر كان الناتج صفر لذلك فإن $\frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $٠ \times \infty$ (لماذا؟)

أضف إلى معلوماتك

تسمى المجموعة: $ع \cup \{-\infty ، \infty\}$ بمجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة، ويرمز لها بالرمز $\overline{ع}$، فإذا كان $أ \in \overline{ع}$ فإن:

١ $\infty + أ = \infty$

٢ $\infty + (-\infty) = أ - = \infty -$

٣ $\frac{أ}{\infty} = \frac{أ}{-\infty} =$ صفر

٤ $أ \times \infty = \begin{cases} -\infty ، & \text{إذا كان } أ < ٠ \\ \infty ، & \text{إذا كان } أ > ٠ \end{cases}$

٥ $أ \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty ، & \text{إذا كان } أ < ٠ \\ \infty ، & \text{إذا كان } أ > ٠ \end{cases}$

مثال

(١) أوجد ناتج العمليات الآتية فى مَجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:

أ $\infty + ٤$	ب $\infty - ٣$	ج $٣ \div ٠$	د $٥ - \div ٠$
هـ $٠ + ٠$	و $٠ \div ٠$	ز $\infty \times ٥$	حـ $\infty - \times ٦ -$

الحل

أ ∞	ب $\infty -$	ج ٠	د غير معرفة
هـ ٠	و كمية غير معينة	ز ∞	حـ ∞

حاول أن تحل

(١) أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:

أ $٠ \div (٢ -)$	ب $٧ \div ٠$	ج $٩ \div \infty$	د $\infty \times ٠$
هـ $\infty \times (٧ -)$	و $١٢ + (\infty -)$	ز $\infty + \infty$	حـ $\infty \div \infty$

نشاط

في الشكل التالي: الخط البياني للدالة د المعرفة على ع **وفق القاعدة** د (س) = ٢ س + ١ الموضَّحة بالجدول التالي:

س	د(س)
٢,١	٥,٢
٢,٠١	٥,٠٢
٢,٠٠١	٥,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٥,٠٠٠٢
.....	
↓	↓
٢	٥

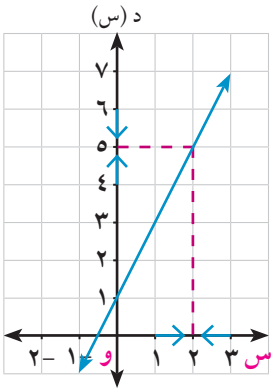
س > ٢

س تقترب من ٢ جهة اليمين

س	د(س)
١,٩	٤,٨
١,٩٩	٤,٩٨
١,٩٩٩	٤,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٤,٩٩٩٨
.....	
↓	↓
٢	٥

س < ٢

س تقترب من ٢ جهة اليسار



نلاحظ أنه عندما تَقترب س من العدد (٢) من اليمين أو من اليسار فإنَّ د(س) تَقترب من العَددِ (٥) ونُعبرِّ عن ذلك رياضيًّا كالآتي: $\lim_{س \to ٢} (٢ س + ١) = ٥$

مثال

(٢) إذا كانت د(س) = $\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ٢.

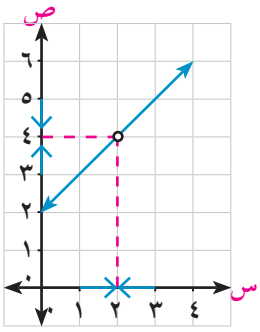
الحل

س	د(س)
٢,١	٤,١
٢,٠١	٤,٠١
٢,٠٠١	٤,٠٠١
.....	
↓	↓
٢	٤

س < ٢

س	د(س)
١,٩	٣,٩
١,٩٩	٣,٩٩
١,٩٩٩	٣,٩٩٩
.....	
↓	↓
٢	٤

س > ٢



من الشكل البياني ومن بيانات الجدول الموَّضحةَ نجد أنَّ د(س) ⟵ ٤ عندما س ⟵ ٢ من جهة اليمين أو من جهة اليسار ∴ نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$ = ٤

لاحظ من هذا المثال أنَّ:

١- الفجوة في الشكل البياني تَعني حالة من حالات عَدم التعيين ∴ عندما س = ٢ (أى أن الدالة: غير معرفة عند س = ٢)

٢- وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ ٢ لاتعنى بالضرورة أنْ تكون الدالة معرفة عند س = ٢.

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د(س) = $\frac{س^{٢}-١}{س+١}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من (- ١)

مثال

(٣) إذا كانت الدالة د معرفة على ع، حيث د(س) = $\begin{cases} س+٢ & \text{لكل } س < ١ \\ س+١ & \text{لكل } س > ١ \end{cases}$

ارسم منحنى هذه الدالة، ثم ابحث وجود نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ د(س)

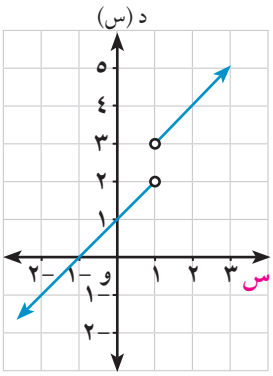
الحل

س	د(س)
١,١	٣,١
١,٠١	٣,٠١
١,٠٠١	٣,٠٠١
.....	
↓	↓
١	٣

س < ١

س	د(س)
٠,٩	١,٩
٠,٩٩	١,٩٩
٠,٩٩٩	١,٩٩٩
.....	
↓	↓
١	٢

س > ١



نُلاحظ من الجدول ومن الشكل البياني للدالة أنَّ: د(س) ⟵ ٣ عندما س ⟵ ١ من جهة اليمين

د(س) ⟵ ٢ عندما س ⟵ ١ من جهة اليسار

أيْ أنهما غير متساويتين

∴ نهـــا د(س) ليس لها وجود
س ← ١

لاحظ أن الفجوات في الشكل البياني تَعني أنَّ د(١) غير معرفة، حيث مجال د(س) = ح - {١}

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت الدالة د معرفة على ع حيث: د(س) = { -٣ عندما س < ٢ ؛ ٣ عندما س > ٢

ارسم منحنى هذه الدالة ثم ابحث وجود نهـــا د(س)
س ← ٢

من الأمثلة السابقة نَستنتج أنَّ:

وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ لايعنى بالضرورة أنْ تكون الدالة معرفة عند س = أ،

والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ فهذا لا يعنى وجود نهاية للدالة.

تعبير شفهي:

عبر بأسلوبك عن الفرق بين قيمة دالة عند نقطة ونهاية الدالة عند نفس النقطة.

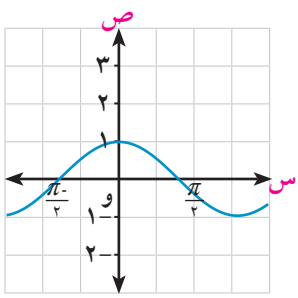
تمـــارين الدرس الأول

أولا: تمارين على إيجاد النهاية بيانيًا:

(١) من الرسم البياني أوجد:

أ نهـــا د(س)
س ← ٠

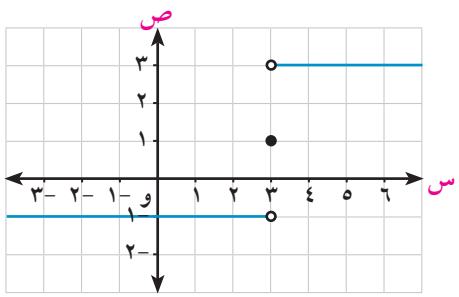
ب د(٠)



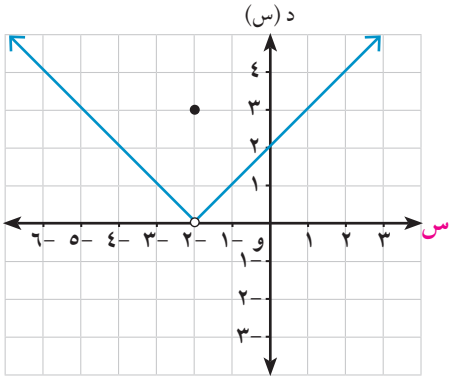
(٢) من الرسم البياني المقابل أوجد إنْ كان ذلك ممكنًا:

أ نهـــا د(س)
س ← ٣

ب د(٣)



٣ من الرسم البيانى المقابل أوجد:



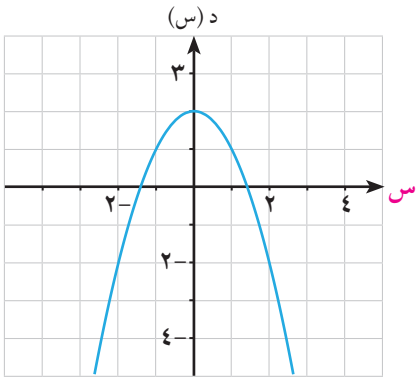
أ $\lim_{س \to -٢}$ د(س)

ب د(- ٢)

جـ $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

د د(٠)

٤ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

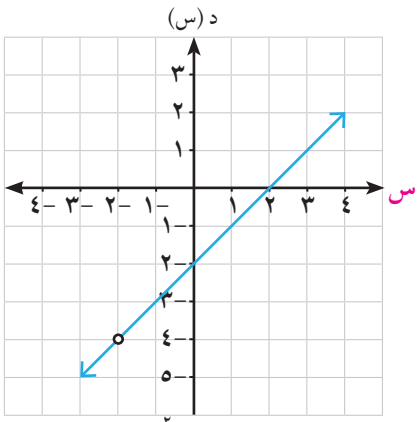


د(س) = ٢ − س^{٢}

أ $\lim_{س \to ٠}$ (٢ - س^{٢})

ب د(٠)

٥ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

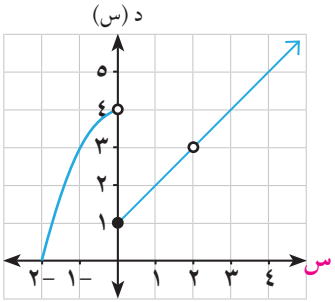


د(س) = $\frac{س^{٢}-٤}{س+٢}$

أ $\lim_{س \to -٢}$ $\frac{س^{٢}-٤}{س+٢}$

ب د(- ٢)

٦ من الشكل البيانى المقابل أوجد:



أ د (٠)

ب $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

جـ د (٢)

د $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

ثانيًا: إيجاد نهاية الدالة عدديًّا:

(٧) أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to ٢}$ د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				←	؟	→			

(٨) أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to -١}$ (٣ س + ١)

س	- ٠,٩	- ٠,٩٩	- ٠,٩٩٩	←	- ١	→	- ١,٠٠١	- ١,٠١	- ١,١
د(س)				←	؟	→			

(٩) أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

س	- ٠,٩	- ٠,٩٩	- ٠,٩٩٩	←	- ١	→	- ١,٠٠١	- ١,٠١	- ١,١
د(س)				←	؟	→			

(١٠) أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)				←	؟	→			

تفكير إبداعي:

(١١) إذا كانت الدالة د معرفة كالآتي: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س + ٣} & \text{لكل س} \neq -٣ \\ ك & \text{عند س} = -٣ \end{cases}$

كوِّن جدولًا لبحث قيم الدالة عندما س تَقترب من -٣ ثم أوجد قيمة ك إذا كان د(-٣) = $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ - ٩}{س + ٣}$

(١٢) إذا كانت الدالة ر معرفة كالآتي: ر(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١} & \text{لكل س} \neq ١ \\ ك & \text{عند س} = ١ \end{cases}$

كوِّن جدولًا لبحث قيم الدالة عندما س تقترب من ١ ثم أوجد قيمة ك إذا كان د(١) = $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١}$

الوحدة الثالثة

الدرس ٢

إيجاد نهاية الدالة جبريًّا

Finding the limit of a function algebraically

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة فى إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية $\text{نهـا}_{س \to ا} \frac{س^{ن} - ا^{ن}}{س - ا} = ن ا^{ن-١}$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة *Limit of a function*
- دالة كثيرة الحدود *Polynomial function*
- تعويض مباشر *direct substitution*
- قسمة تركيبية *synthetic division*
- المرافق *conjugate*

الأدوات المستخدمة

- ألة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية فى رَسمِ الشكلِ البيانى لكلٍّ من الدالتين:

$د_١(س) = \frac{س^{٢} - س - ٢}{س - ٢}$ ، $د_٢(س) = س + ١$

ماذا تلاحظ؟

أوجد: $\text{نهـا}_{س \to ٢} د_١(س)$ ، $\text{نهـا}_{س \to ٢} د_٢(س)$

ماذا تستنتج؟

تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود *Limit of a polynomial function*

نظرية

إذا كانت د(س) كثيرة حدود، أ ∈ ع

فإن: $\text{نهـا}_{س \to ا} د(س) = د(ا)$

مثال

١ أوجد نهاية كلٍّ من الدوال الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س \to ٢} (س^{٢} - ٣س + ٥)$ ب $\text{نهـا}_{س \to ٣} (-٤)$

الحل

أ $\text{نهـا}_{س \to ٢} (س^{٢} - ٣س + ٥)$

$= ٤ - ٦ + ٥ = ٣$ (بالتعويض المباشر)

ب $\text{نهـا}_{س \to ٣} (-٤) = -٤$

لاحظ أنَّ د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم س ∈ ع

حاول أن تحل

١ أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س \to ١} (٢س - ٥)$ ب $\text{نهـا}_{س \to -٢} (٣س^{٢} + س - ٤)$

نظرية ٢

إذا كان $\lim_{س \to ا} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to ا} و(س) = م$

فإن:

١- $\lim_{س \to ا} ك\, د(س) = ك.ل$ حيث $ك \in ع$

٢- $\lim_{س \to ا} [د(س) \pm و(س)] = ل \pm م$

٣- $\lim_{س \to ا} د(س) . و(س) = ل.م$

٤- $\lim_{س \to ا} \frac{د(س)}{و(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط $م \neq ٠$

٥- $\lim_{س \to ا} (د(س))^{ن} = ل^{ن}$ حيث $ل^{ن} \in ع$

مثال

(٢) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -١} \frac{٣س + ٧}{س^{٢} + ٢س - ٥}$

ب $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا\, س}{س}$

الحل

أ $\lim_{س \to -١} \frac{٣س + ٧}{س^{٢} + ٢س - ٥} = \frac{\lim_{س \to -١} (٣س + ٧)}{\lim_{س \to -١} (س^{٢} + ٢س - ٥)} = \frac{٣ \times -١ + ٧}{(-١)^{٢} + ٢(-١) - ٥} = \frac{٤}{-٦} = \frac{-٢}{٣}$

ب $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا\, س}{س} = \frac{\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} ظا\, س}{\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}$

حاول أن تحل

(٢) احسب النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٣}{٢س + ١}$

ب $\lim_{س \to \pi} س\, جتا\, س$

نظرية ٣

إذا كانت $د(س) = و(س)$ لكل $س \in ع - \{أ\}$

وكانت $\lim_{س \to ا} و(س) = ل$ فإن $\lim_{س \to ا} د(س) = ل$

مثال

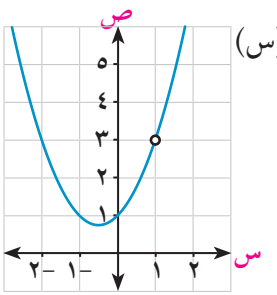
(٣) أوجد: $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$

الحل

نُلاحظ أنَّ $د(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ غير مُعينة عند $س = ١$

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفريَّة عندما $س \neq ١$

فإنه يمكن كتابة $د(س)$ على الصورة.



$$د(س) = \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{(س - ١)} = س^{٢} + س + ١$$

$$= و(س)$$

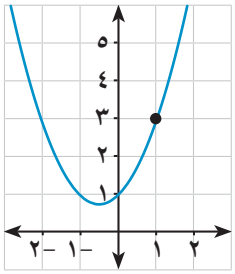
من ذلك نَجد أنَّ د(س) = و(س) لكل س ≠ ١

وحيث أن $\lim_{س \to ١}$ و(س) = ٣

فإنه طبقًا **للنظرية السابقة نستنتج أن** $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣

$$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١} = ٣$$

و(س)



حاول أن تحل

(٣) أوجد: $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س + ٢}$

مثال

(٤) أوجد:

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ٢س^{٢} + ١}{س^{٢} + س - ٢}$$

الحل

نلاحظ أن دالة البسط د(س) = ٠ وذلك بالتعويض عن س = ١،

كذلك دالة المقام و(س) = ٠ بالتعويض أيضًا عن س = ١ وهذا يَعني أنَّ العامل (س - ١) مشترك في كلٍّ من البسط والمقام. ونظرًا لصعوبة تَحليل دالة البسط إلى عوامل أحدها (س - ١) نستخدم القسمة المطولة لنوجد العامل الآخر للمقدار س^{٣} - ٢س^{٢} + ١ كالآتي:

س^{٣} - ٢س^{٢} + ١		س - ١
س^{٣} - س^{٢}		س^{٢} - س - ١
٠ - س^{٢}	+ ١	
- س^{٢} + س		
٠ - س + ١		
- س + ١		
صفر		

لذلك فإن:

$$\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^{٢} - س - ١)}{(س - ١)(س + ٢)} = \lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - س - ١}{س + ٢} = -\frac{١}{٣}$$

حاول أن تحل

(٤) أ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢}$

ب $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٣} - ١٠س - ٣}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

ارشاد للحل

فى عملية القسمة المطولة

(١) ترتيب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا بنفس الطريقة.

(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ويطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

مثال

استخدام المرافق

(٥) أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$ ب $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$

الحل

لاحظ أنَّ: $و(س) = \sqrt{س - ٣} - ١$ أيْ أنَّ: $و(٤) = ٠$

$ع(س) = س - ٤$ أيْ أنَّ: $ع(٤) = ٠$

أ $\therefore \frac{و(٤)}{ع(٤)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

لذلك نبحث عن طرق نتخلَّص بها من العامل (س - ٤) فى كلٍّ من البسط و المقام.

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س - ٣} + ١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٣ - ١}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$$

ب $$\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣} = \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٤} + ٣}{\sqrt{س + ٤} + ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)(\sqrt{س + ٤} + ٣)}{س + ٤ - ٩} = \lim_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)(\sqrt{س + ٤} + ٣)}{(س - ٥)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} س(\sqrt{س + ٤} + ٣) = ٥ (٣ + ٣) = ٣٠$$

حاول أن تحل

(٥) أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ ب $\lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$

نظرية ٣

$$\lim_{س \to ا} \frac{س^ن - ا^ن}{س - ا} = ن \, ا^{ن - ١}$$

مثال

(٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٩} - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^{١٩} - ١^{١٩}}{س - ١} = ١٩ \times ١^{١٨} = ١٩$

نتائج

نتائج على النظرية:

١- $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ا)^{ن} - ا^{ن}}{س} = ن\, ا^{ن-١}$

٢- $\lim_{س \to ا} \frac{س^{ن} - ا^{ن}}{س^{م} - ا^{م}} = \frac{ن}{م}\, ا^{ن-م}$

مثال

(٧) أوجد:

أ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$

ب $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٤}$

جـ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{١١} - ١}{س}$

د $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$

الحل

أ $= \lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٥^{٤}}{س} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

ب $= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س^{٢} - ٢^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times ٣٢ = ٢٠$

جـ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{١١} - ١}{س} = ١١ \times ١^{١١-١} = ١١$

د $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^{٥} - (-٢)^{٥}}{(س - ٤) - (-٢)}$

$= ٥ (-٢)^{٤} = ٨٠$

لاحظ أن

$١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٢^{٤})^{\frac{٥}{٤}} = ٢^{٤ \times \frac{٥}{٤}}$

$= ٢^{٥} = ٣٢$

كذلك فإن:

$١٦^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$

حاول أن تحل

(٦) أوجد:

أ $\lim_{س \to -٥} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س + ٥}$

ب $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(هـ + ٣)^{٤} - ٨١}{هـ}$

جـ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ١}{س}$

تمارين الدرس الثاني

أكمل ما يأتي:

(١) $\lim_{س \to ٢} (٣س + ١) =$

(٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س + ١} =$

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - س}{س} =$

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} =$

(٥) $\lim_{س \to ا} \frac{س^{٥} - ا^{٥}}{س - ا} =$

(٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} =$

(٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س - ١} =$

(٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢} =$

(٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨} =$

(١٠) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}\right)^{٥} =$

(١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - س - ٢}{٢س - ٤} =$

(١٢) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٧} + ١}{س^{٥} + ١} =$

اختر الإجابة الصحيحةَ من بين الإجابات المعطاة:

(١٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - ١}{س}$ تُساوي:

أ ٠ ب ١ جـ ٢ د ليس للدالة نهاية

(١٤) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + س}{س + ١}$ تُساوي:

أ -١ ب صفر جـ ١ د ٣

(١٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٢} - ٨}{س - ٢}$ تُساوي:

أ ٢ ب ٤ جـ ٦ د ٨

(١٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س}{س}$ تساوي

أ ١ ب $\frac{\pi}{٢}$ جـ $\frac{٢}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية

(١٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{طا س}{س}$ تساوي

أ $\frac{\pi}{٢}$ ب ١ جـ $\frac{٤}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية

أوجد قيمةَ كلٍّ من النهايات الآتية (إنْ وجِدَت)

(١٨) $\lim_{س \to ٣} (س^{٢} - ٣س + ٢)$

(١٩) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٢} + ١}{س - ٣}$

(٢٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢س - جا س)$

(٢١) $\lim_{س \to \pi} \frac{جتا ٢س}{س}$

(٢٢) $\lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{س^{٣} + ١}$

(٢٣) $\lim_{س \to ٩} \frac{٩ - س}{س^{٢} - ٨١}$

(٢٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} + ٤}{س - ٤}$

(٢٥) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + س}$

(٢٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤س^{٢} - ٦٤}{س - ٤}$

(٢٧) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢٥س}{س - ٥}$

(٢٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س^{٢} - ٤)^{٢}}{س - ٢}$

(٢٩) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$

(٣٠) $\lim_{س \to -١} \frac{٥س^{٢} + ٥}{٣س^{٢} - ٣}$

(٣١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س^{٢} - ١}$

(٣٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٤}$

(٣٣) $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}} \frac{٢س^{٢} - س - ٣}{٤س^{٢} - ٩}$

(٣٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} - س - ٢}$

(٣٥) $\lim_{س \to -٣} \frac{٢س^{٢} + ٥س - ٣}{س^{٢} + س - ٦}$

٣٦ $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٣} - ١}$

٣٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س-١)^{٢} - ١}{٥ س}$

٣٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+١)^{٣} - ١}{س}$

٣٩ $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س^{٢}}{س+١} - \frac{٣س+٤}{س+١}\right)$

٤٠ $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س-٢} - \frac{١٢}{س^{٣} - ٨}\right)$

٤١ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٢)^{٣} - ١}{س(س-٣)}$

٤٢ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - س^{٢} + ٢س - ٢}{س - ١}$

٤٣ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + س^{٢} - ٢}{س - ١}$

٤٤ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ٥س^{٢} - س}{س^{٤} + ٢ س}$

٤٥ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$

٤٦ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

٤٧ $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٤س - ٣} - ٣}{س - ٣}$

٤٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$

٤٩ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٩س+١٦} - ٤}{س}$

٥٠ $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س} - \sqrt{٣}}$

٥١ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٧} - ١}{س - ١}$

٥٢ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

٥٣ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣} - ٦٤}{س - ٤}$

٥٤ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣}$

٥٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{٢ س - ٤}$

٥٦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٦} - ٦٤}{س^{٥} - ٣٢}$

٥٧ $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^{٣} - ١٢٨}{س^{٣} - ١٦}$

٥٨ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٣٢ س^{٥} - ١}{١٦ س^{٤} - ١}$

٥٩ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{٧}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{٢} - س}$

٦٠ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+١)^{٩} - ١}{س}$

٦١ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣+هـ)^{٤} - ٨١}{٦ هـ}$

٦٢ $\lim_{س \to ١} \frac{(س+٢)^{٤} - ٨١}{س - ١}$

الوحدة الثالثة

الدرس ٣

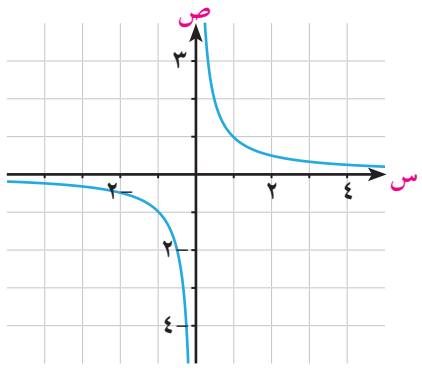
نهاية الدالة عند اللانهاية

Limit of a function at Infinity

نحتاج فى كَثيرٍ من التطبيقات العمليَّة والحياتية إلى مَعرفة سلوك الدالة د(س) عندما س ⟵ ∞ والنشاط التالى يوضِّح ذلك.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب فى رسم الدالة د حيث: $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $س > ٠$



ماذا تُلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم س الموجبة حتى تَقترب من ما لانهاية؟

من الشكل المرسوم **نُلاحظ أنَّ:**

- إنه كلما زادت قيم س واقتربت من مالا نهاية اقتربت قيم د(س) من الصفر، لذلك نَقول إنَّ نهاية د(س) عندما تقترب س من ما لانهاية تُساوى صفر.

تعلم

نهاية دالة عند اللانهاية

Limit of a function at infinity

نظرية ١

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{س} = ٠$$

نتيجة

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠ \quad \{\text{حيث ن} \in ع^{+}، أ \text{ ثابت}\}$$

قواعد أساسية:

- $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} جـ = جـ$ ، حيث جـ ثابت
- إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإنَّ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} س^{ن} = \infty$

لاحظ أن: نَظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضَرب أو قسمة دالتين عند س ⟵ أ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما س ⟵ ∞

سوف تتعلم

- نهاية الدالة عند اللانهاية
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبرى.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل البياني.

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة عند اللانهاية.

Limit of a function at infinity

الأدوات المستخدمة

- ألة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

مثال

(١) أوجد:

(أ) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{١}{س} + ٣\right)$ (ب) $\lim_{س \to \infty} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right)$

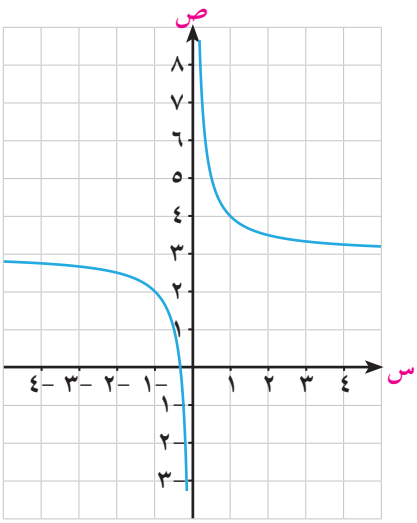
➢ ثم تَحقق من ذلك بيانيًّا باستخدام أحد البرامج الرسومية.

الحل

(أ) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{١}{س} + ٣\right) = \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} + \lim_{س \to \infty} ٣$

$= ٠ + ٣ = ٣$

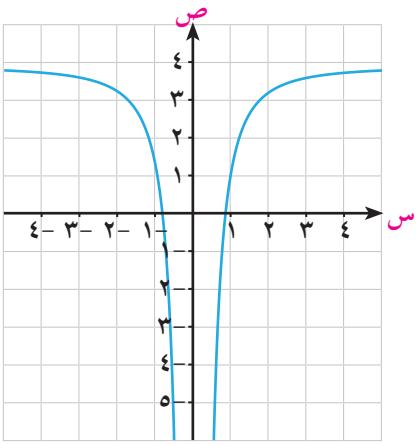
$\therefore \lim_{س \to \infty} \left(\frac{١}{س} + ٣\right) = ٣$



(ب) $\lim_{س \to \infty} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right) = \lim_{س \to \infty} ٤ - \lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}}$

$= ٤ - ٣ \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٢}} = ٤ - ٣ \times ٠ = ٤$

$\therefore \lim_{س \to \infty} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right) = ٤$



حاول أن تحل

(١) أوجد:

(أ) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س} + ٢\right)$ (ب) $\lim_{س \to \infty} \left(٥ + \frac{٢}{س^{٢}}\right)$

مثال

(٢) أوجد: $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٤ س - ٥)$

الحل

$$\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(س^{٣}+٤س-٥)=\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}س^{٣}(١+\frac{٤}{س^{٢}}-\frac{٥}{س^{٣}})$$ وذلك بأخذ $س^{٣}$ عامل مشترك

$$=\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}س^{٣}\times\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(١+\frac{٤}{س^{٢}}-\frac{٥}{س^{٣}})=\infty\times١=\infty$$

حاول أن تحل

(٢) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(س^{٣}+٧س^{٢}+٢)$

ب $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(٤-٣س-س^{٣})$

مثال

(٣) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}\frac{٢س-٣}{٣س^{٢}+١}$

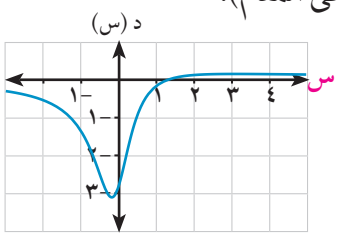
ب $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}\frac{٢س^{٢}-٣}{٣س^{٢}+١}$

جـ $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}\frac{٢س^{٣}-٣}{٣س^{٢}+١}$

الحل

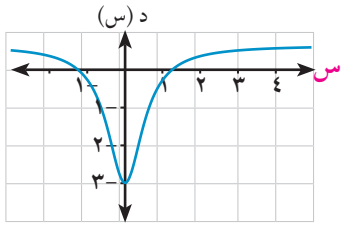
فى كل الحالات نقسم كل من البسط والمقام على $س^{٢}$ (أعلى قوة للمتغير س فى المقام).

أ $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}\frac{٢س-٣}{٣س^{٢}+١}=\frac{\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(\frac{٢}{س}-\frac{٣}{س^{٢}})}{\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(٣+\frac{١}{س^{٢}})}=\frac{٠-٠}{٠+٣}=٠$



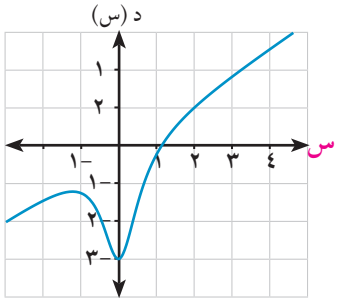
ب $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}\frac{٢س^{٢}-٣}{٣س^{٢}+١}=\frac{\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(\frac{٢}{س}-\frac{٣}{س^{٢}})}{\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(٣+\frac{١}{س^{٢}})}$

$=\frac{٠-٢}{٠+٣}=\frac{٢}{٣}$



جـ $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}\frac{٢س^{٣}-٣}{٣س^{٢}+١}=\frac{\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(٢س-\frac{٣}{س^{٢}})}{\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}(٣+\frac{١}{س^{٢}})}$

$=\frac{\infty-٠}{٠+٣}=\infty$



نستنتج من هذا المثال أنَّ: عند إيجاد $\text{نهـا}_{س\leftarrow\infty}\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط تساوى درجة المقام.
- النهاية تُساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- النهاية تعطى ∞ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

حاول أن تحل

(٣) أوجد:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٢} - ٣س + ١}{٢س}$

ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٣} - ٥س}{٨س^{٤} + ٣س^{٢} - ٢}$

جـ $\lim_{س \to \infty} \frac{-٦س^{٢} + ١}{٣س^{٢} + س - ٢}$

مثال

(٤) أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

ب $\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{٨س^{٢} + ٤})$

الحل

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

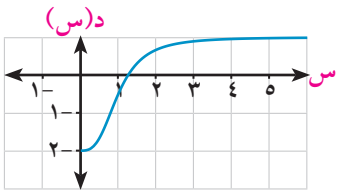
∵ س ⟵ ∞

∴ س > ٠ أيْ أنَّ |س| = س

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٢}{س^{٣} + ١}$

بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على $س^{٣}$

$= \frac{\lim_{س \to \infty} (١ - \frac{٢}{س^{٣}})}{\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س^{٣}})} = \frac{١ - ٠}{١ + ٠} = ١$



$د(س) = \frac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

ب $\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{٨س^{٢} + ٤})$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س - \sqrt{٨س^{٢} + ٤})}{١} \times \frac{(س + \sqrt{٨س^{٢} + ٤})}{(س + \sqrt{٨س^{٢} + ٤})}$

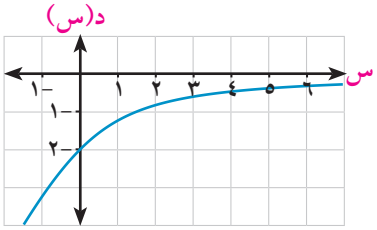
$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} - س^{٢} - ٤}{س + \sqrt{٨س^{٢} + ٤}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٤}{س + \sqrt{٨س^{٢} + ٤}}$

∵ س ⟵ ∞

∴ س > ٠ ⟵ $\sqrt{٨س^{٢}} = |س| = س$ بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على $س = \sqrt{٨س^{٢}}$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{-٤}{س + \sqrt{٨س^{٢} + ٤}} = \frac{\lim_{س \to \infty} -\frac{٤}{س}}{\lim_{س \to \infty} (١ + \sqrt{٨ + \frac{٤}{س^{٢}}})} = \frac{٠}{١ + ١} = ٠$



$د(س) = س + \sqrt{٨س^{٢} + ٤}$

حاول أن تحل

(٤) أوجد النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{س - ٣}{\sqrt{٨س^{٢} + ٢٥}}$

ب $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{٨س^{٢} + ٥س} - \sqrt{٨س^{٢} - ٣س})$

تمـــاريـن الدرس الثالث

أكمل ما يأتى:

(١) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{٣}{س}) =$

(٢) $\lim_{س \to \infty} (٢ - \frac{٣}{س^{٢}}) =$

(٣) $\lim_{س \to \infty} (-٧) =$

(٤) $\lim_{س \to \infty} (س^{٢} - ٣) =$

(٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ١}{س}$

(٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٥}{س^{٢} + ١} =$

(٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٥} + ٣}{س^{٣} - ٥} =$

(٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س}{\sqrt{٨س^{٢} - ١}} =$

(٩) $\lim_{س \to \infty} (٣ - \frac{٧}{س} + \frac{٤}{س^{٢}}) =$

(١٠) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{٨س^{٢} + ١} - س) =$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٦س}{٣س^{٢} + ٣}$ تُساوى:

أ صفر ب ٢ جـ ٣ د ∞

(١٢) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٤}{س} + ١}$

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ∞

(١٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س + ٣}{٢ - س^{٢}}$

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{٣}{٢}$ د ∞

(١٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} + ١}{٣س - ١}$

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ جـ ١ د ∞

(١٥) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{س + ١}{٤س - ١}}$

أ -١ ب $\frac{١}{٤}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د ١

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

(١٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}}$

(١٧) $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١)$

(١٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ - ٧س}{٢ + ٣س}$

(١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢}}{س + ٣}$

(٢٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢}}{س^{٢} + ٣}$

(٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} + س + ٤}$

(٢٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ٤س + ١}$

(٢٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٢}{٣س^{٢} + ٤س - ١}$

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} - ١}{٤س^{٣} - ٥س - ١}$

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} - ٦}{(س - ١)^{٢}}$

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} (٧ + \frac{٢س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}})$

(٢٧) $\lim_{س \to \infty} (\frac{١}{٣س^{٢}} - \frac{٥س}{٢ + س})$

(٢٨) $\lim_{س \to \infty} (\frac{س}{٢س + ١} + \frac{٣س^{٢}}{(س - ٣)^{٢}})$

(٢٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{- س}{\sqrt{٨ + ٤س^{٢}}}$

(٣٠) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt[٨]{٤س^{٢} - ٢س + ١} - ٢س)$

(٣١) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt[٨]{٥س^{٢} + ٤س + ٧} - \sqrt[٨]{٥س^{٢} + س + ٣})$

(٣٢) $\lim_{س \to \infty} س (\sqrt[٨]{٤س^{٢} + ١} - ٢س)$

(٣٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} + س - ١}{٨س^{٢} - ٣}$

(٣٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ - ٣س^{٣}}{\sqrt[٨]{٩ + س^{٦}}}$

(٣٥) إذا كان $\lim_{س \to \infty} (\sqrt[٨]{أس^{٢} + ٣ب س + ٥} - ٢س) = ٣$ فما قيمة كل من أ ، ب.

تفكير ابداعى

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قَدْرها ٥٠٠٠ جنيه، وتكلفة لكل كارت نصف جنيه فكانت التكلفة الإجمالية جـ = $\frac{١}{٢}$ س + ٥٠٠٠ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

أوجد:

(١) تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

أ ١٠٠٠٠ كارت

ب ١٠٠٠٠٠ كارت

(٢) أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لانهائى من الكروت.

مُلَخَّصُ الوَحْدَة

➢ مجموعة الأعداد الحقيقية المتدة $\overline{ع}$ هى ع ∪ {-∞ ، ∞}

① ∞ + أ = ∞ ② ∞- + أ = ∞- ③ $\frac{أ}{∞}$ = $\frac{أ}{∞-}$ = صفر

④ ∞ × أ = { ∞- ، إذا كان أ > ٠ ; ∞ ، إذا كان أ < ٠ } ⑤ ∞- × أ = { ∞ ، إذا كان أ < ٠ ; ∞- ، إذا كان أ > ٠ }

➢ إذا كانت أ ∈]جـ ، ء [فإن نهاية د(س) عندما س ⟵ أ تساوى ل إذا وفقط إذا كانت نهايتاها من اليمين ومن اليسار عند س⟵ أ متساويتين وكل منها تساوى ل.

➢ إنَّ وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ أ لايعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ، والعكس إذا كانت معرفة عند س = أ فهذا لايعنى وجود نهاية للدالة.

➢ **إذا كانت** نهـــا د(س) = ل ، نهـــا و(س) = م **فإن:**

① نهـــا ك د(س) = ك.ل حيث ك ∈ ع ② نهـــا [د(س) ± و(س)] = ل ± م

③ نهـــا د(س) . و(س) = ل.م ④ نهـــا $\frac{د(س)}{و(س)}$ = $\frac{ل}{م}$ بشرط م ≠ ٠

⑤ نهـــا (د(س))ن = لن حيث لن ∈ ع

➢ نهاية الدالة عند اللا نهاية.

① نهـــا $\frac{١}{س^{ن}}$ = ٠ ② نهـــا $\frac{أ}{س^{ن}}$ = ٠ {حيث ن ∈ ع+ ، أ ثابت}

③ نهـــا جـ = جـ ، حيث جـ ثابت إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن نهـــا س ن = ∞

➢ عند إيجاد نهـــا $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

① النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لايساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.

② النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.

③ النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

➢ عند أجراء عملية القسمة المطولة يجب مراعاة مايأتى:

① ترتيب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًّا ، وتنازليا بنفس النظام.

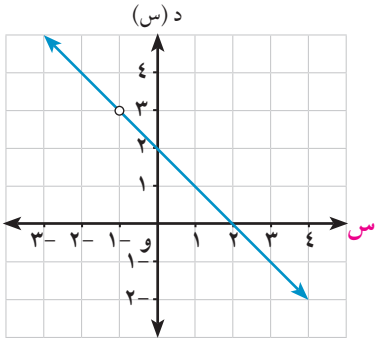
② نَقسم الحدِّ الأول من المقسوم على الحدِّ الأول من المقسوم عليه وتكتب ناتج القسمة.

③ نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه و يُطَرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.

④ نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

تمارين عامة

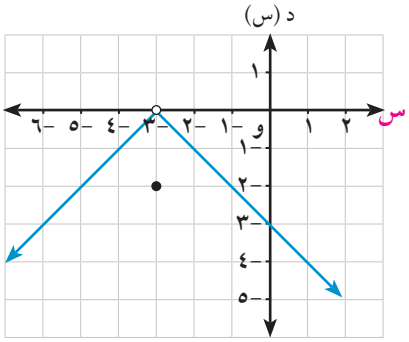
(١) من الشكل البيانى المقابل أكمل:



شكل (١)

نهـــا (-س + ٢)
س←-١

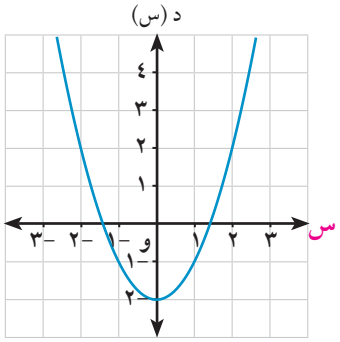
د(-١)



شكل (٢)

نهـــا د(س)
س←-٣

د(-٣)



شكل (٣)

نهـــا (س^{٢} - ٢)
س←٠

د(٠)

(٢) أكمل الجدول الآتى واستنتج نهـــا $\frac{س^{٢}-١}{س-١}$
س←١

س	٠,٩	٠,٩٩	٠,٩٩٩	←	١	→	١,٠٠١	١,٠١	١,١
د(س)				←		→			

(٣) إذا كانت الدالة د معرفة كالآتى: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢}-س-٢}{س-٢} & \text{حيث س} \neq ٢ \\ ك & \text{عند س} = ٢ \end{cases}$

كون جدولا لبحث قيم الدالة عندما س ← ٢ ثم أوجد قيمة ك إذا كان د(٢)= نهـــا $\frac{س^{٢}-س-٢}{س-٢}$
س←٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٤) نهـــا $\frac{س^{٢}+س}{س}$ تُساوى:
س←٠

أ صفر ب ١ ج ٢ د ٣

(٥) نهـــا $\frac{س^{٣}+٢}{س^{٢}+١}$ تُساوى:
س←∞

أ ١ ب ٢ ج صفر د ∞

(٦) نهـــا $(\sqrt{٨س^{٢}+١}-س)$تُساوى:
س←∞

أ -١ ب صفر ج ١ د ∞

أوجد قيمة كلٍّ من النهايات الآتية إنْ وجدت :

(٧) نهـــا $\frac{س+٧}{س+٢}$
س←-٢

(٨) نهـــا $\frac{\sqrt{٨س}-١}{س-١}$
س←١

(٩) نهـــا $\frac{س^{٣}-٢٧}{س-٣}$
س←٣

(١٠) نهـــا $\frac{س^{٢}-٦س-١٦}{س-٨}$
س←٨

(١١) نهـــا $\frac{س^{٧}-١٢٨}{س^{٣}-٨}$
س←٢

(١٢) نهـــا $\frac{(س+١)^{١٠}-١}{س}$
س←٠

(١٣) نهـــا $\frac{٣س^{٣}-١}{س^{٢}+١}$
س←∞

(١٤) نهـــا $\frac{٧س^{٣}-٥}{٣س^{٢}-س}$
س←∞

(١٥) نهـــا $\frac{٢س^{٢}+٥س+١}{٣س^{٢}-٧}$
س←∞

اختبار تراكمى

(١) ضَع كُلَّ كَسرٍ من الكسور الجبريَّةِ الآتية فى أَبسطِ صورة :

أ $\frac{س}{س^{٢} - س}$ ب $\frac{س + ١}{س^{٢} + ٢س + ١}$ ج $\frac{س^{٢} - ٢٥}{(س - ٥)^{٢}}$ د $\frac{س + ٣}{س^{٣} - ٩ س}$

(٢) إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٢ س}{٢ س + ٨}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٢} + ٤ س}{س^{٢} + ٨س + ١٦}$ هل $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$؟ فسر إجابتك.

(٣) إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٤}{س + ١}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٣}{س - ١}$ فأوجد $ن(س) = ن_{١}(س) + ن_{٢}(س)$ مبينًا مجال ن.

(٤) أوجد أَبسط صورةٍ للدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س + ١} + \frac{١}{س - ١}$ مبينًا مجالها.

(٥) أوجد أَبسط صورةٍ للدالة ر حيث $ر(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢}} + \frac{س + ٥}{٣ س}$ مبينًا مجالها .

(٦) اكتب التعبير الرمزى للجملة الرياضية الآتية:

إذا اقتربت د(س) من ل (ل ∈ ع) حينما تقترب س من أ فإن ل تعرف كنهاية لـ د(س) عندما تقترب س من أ.

(٧) إذا كانت $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ فادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ١.

(٨) إذا كانت الدالة د حيث د(س) $\begin{cases} س & \text{عندما س} > ٢ \\ س + ٢ & \text{عندما س} \leq ٢ \end{cases}$

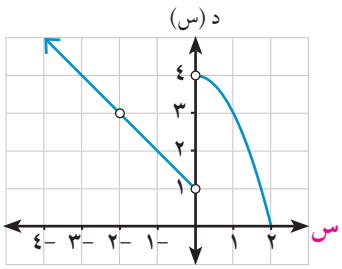
ارسم منحنى هذه الدالة، ثم ابحث وجود $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

(٩) أعط أمثلة عَددية تُوضِّح فيها مايأتى:

أ وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ ١ لا يعنى بالضرورة أنْ تكون الدالةُ معرفة عند س = ١.

ب إذا كانت الدالة معرفة عند س = ١ فهذا لا يعنى وجود نهاية للدالة.

(١٠) فى الشكل المقابل أوجد :



أ د(٠) ب $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

ج د(-٢) د $\lim_{س \to -٢}$ د(س)

(١١) أوجد النهايات الآتية إنْ وُجِدَت:

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{٧ س}{٢ س + ٥}$ ب $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ س^{٢}}{٣ - س}$ ج $\lim_{س \to \infty} \frac{|س|}{س}$ د $\lim_{س \to \infty} (\frac{س^{٢} + ١ - س}{س})$

هـ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٥ س + ٦}{س - ٢}$ و $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٨ س + ٣} - ٢}{س - ١}$

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

Trigonometry



أهداف الوحدة

في نهاية هذه الوَحْدةِ من المتوقع أنْ يكون الطالب قادرًا على أن:

- يَتعرف ويستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث، والذى يَنص على أنه فى أىِّ مثلث تَتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يَستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.
- يَستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث (يوجد حَلَّين لزاوية مجهولة).
- يَستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأىِّ مثلث وطول نِصف قُطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حِلِّ تمارين متنوعة.
- يَتعرف، ويَستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الأتية:
- إذا علم فى المثلث قياسا زاويتين، وطول أحد أضلاعه.
- إذا علم فى المثلث طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانون (قاعدة الجيب، وجيب التمام) لأى مثلث.

المصطلحات الأساسية

حساب مثلثات	*trigonometry*	أقصر ضلع	*Shortest side*	أكبر زاوية	*Largest angle*
قاعدة الجيب	*Sine rule*	أطول ضلع	*Longest side*	مساحة المثلث	*The area of the triangle*
قاعدة جيب التمام	*Cosine rule*	طول ضلع مجهول	*missing length*	أطوال أضلاع المثلث	*The sides lenghtes of a Triangle*
زاوية حادة	*acute angle*	زاوية مجهولة	*UnKnown angle*		
زاوية منفرجة	*obtuse angle*	أصغر زاوية	*Smallest angle*	زاوية مقابلة	*The opposite angle of an side*
زاوية قائمة	*right angle*				

دروس الوحدة

الدرس الأول: قانون (قاعدة) الجيب

الدرس الثانى: قانون (قاعدة) جيب التمام

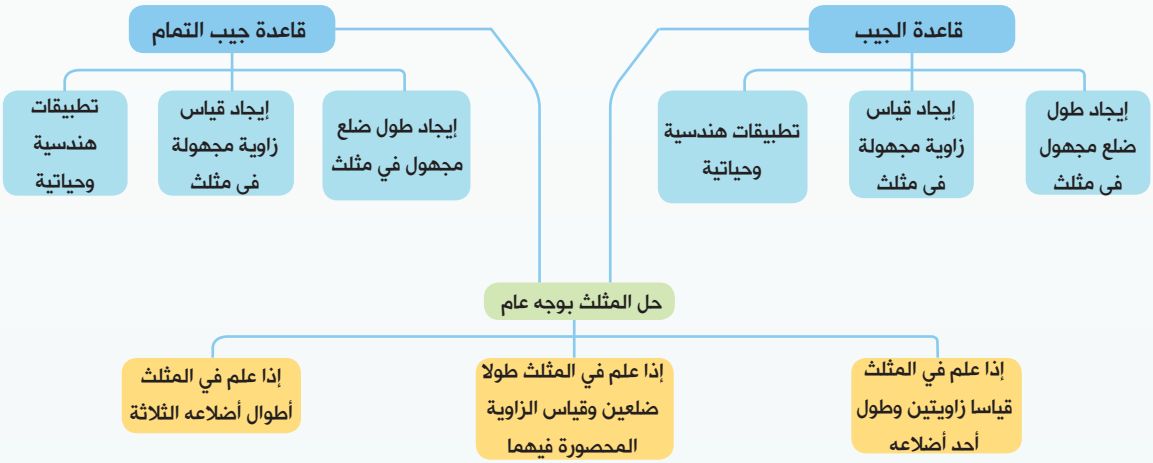
مقدمة الوحدة

المصطلح المقابل لحساب المثلثات فى اللغة الإنجليزية هو Trigonometry وهى كلمة مشتقة من ثلاث كلمات لاتينية تعنى "قياس المثلث" وبواسطة هذا الفرع من فروع الرياضيات يُمكن أن نعالج ونتعرَّف على الأضلاع والزوايا غير المعلومة فى المثلث بمعلومية العناصر المعلومة منه، وسوف تَدرس فى هذه الوحدة بعض القوانين والعلاقات التى تَربط بين أضلاع المثلث وزواياه.

ونشير هنا إلى أنَّ العالِمَ الرياضى ليونارد أويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) المولود بالقرب من بازل بسويسرا هو أول من استخدم الحروف الإنجليزية الصغيرة (a,b,c,.....) لتشير إلى أضلاع المثلث ، والحروف الإنجليزية الكبيرة (A,B,C,.....) لتشير إلى زواياه، كما أنه استخدم الحرفين R,r ليدلا على طولا نصفى قطرى الدائرة الداخلة والخارجة للمثلث واستخدام الحرف S ليدل على نصف محيط المثلث، كما تَوَّصل إلى القاعدة: abc = 4rRs أىْ حاصل ضرب أطوال أضلاع المثلث الثلاثة يُساوى ٤ مضروبًا فى طولى نصفى قُطرى الدائرة الداخلة والخارجة للمثلث ونصف محيطة.

لاحظ أننا سوف نَستخدم الحروف أ، ب، جـ لتدلَّ على أطوال أضلاع المثلث، والحروف أ، ب، جـ لتدلَّ على قياسات زواياه، وكذلك الحرف ع ليدلَّ على محيط المثلث، ﻧ لتدلَّ على طول نصف قُطر الدائرة، وقد نُعبرِّ عن طول نصف قُطر الدائرة الداخلة ﻧ١ ، وطول نصف قُطر الدائرة الخارجة ﻧ ، إذا دَعتِ الحاجةُ إلى ذلك.

مخطط تنظيمى للوحدة



قانون (قاعدة) الجيب
The Sine rule

سوف تتعلم
- قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة الجيب.
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها

المصطلحات الأساسية
- قاعدة الجيب — *Sine rule*
- زاوية حادة — *acute angle*
- زاوية منفرجة — *obtuse angle*
- زاوية قائمة — *right angle*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

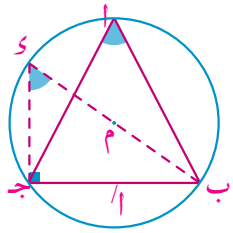
فكر و ناقش
سبق أن تَعلَّمت كيفية حل المثلث القائم الزاوية، والآن سوف نتعامل مع مثلثات غير قائمة الزوايا لتتعلم كيفية إيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا هذه المثلثات.
تعلم أنَّ كل مثلث يتكون من ستة عناصر، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا، و إذا أعطيت أى ثلاثة عناصر منها فإنه يمكنك إيجاد العناصر الثلاثة الأخرى، وذلك باستخدام قانونى الجيب من بينهما طول الضلع وجيب التمام، وعندئذ نقول: إنه أمكننا حل المثلث.

تعلم
قانون (قاعدة) الجيب
The Sine rule

(الاثبات لا يمتحن فيه الطالب)

تمثل الأشكال الآتية ثلاثة أنواع من المثلثات.

حاد الزاوية

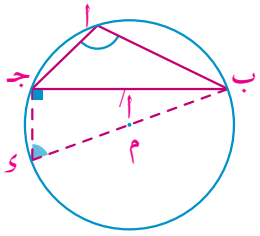


شكل (١)

ق(∠أ) = ق(∠ء)

حاد الزاوية

منفرج الزاوية

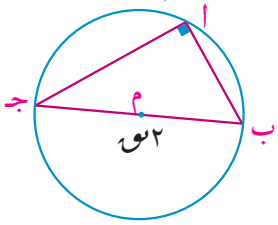


شكل (٢)

ق(∠أ) = ١٨٠° - ء)

منفرج الزاوية

قائم الزاوية



شكل (٣)

ق(∠أ) = ٩٠°

قائم الزاوية

فى الشكل (١) حيث أ ب جـ حاد الزوايا حا أ = $\frac{أ'}{٢نق}$ = حا ء

وبالتالى يمكن استنتاج أن حا ب = $\frac{ب'}{٢نق}$، حا جـ = $\frac{جـ'}{٢نق}$

فى الشكل (٢) حيث المثلث أ ب جـ منفرج الزاوية فى أ

حا أ = حا (١٨٠° - ء) = حا ء [لاحظ: حا (١٨٠° - أ) = حا أ]

حا ء = $\frac{أ'}{٢نق}$ ∴ حا أ = $\frac{أ'}{٢نق}$

وبالتالى يمكن استنتاج أنَّ حا ب = $\frac{ب'}{٢نق}$ ، حا جـ = $\frac{جـ'}{٢نق}$

«استعن بمعلمك لاثبات صحة ذلك»

والآن: حاول إثبات صحة ذلك، حيث المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى أ

وبصفة عامة قانون (قاعدة) الجيب فى المثلث أ ب جـ هى:

$$\frac{أ}{\text{حا}\, أ} = \frac{ب}{\text{حا}\, ب} = \frac{جـ}{\text{حا}\, جـ} = ٢ه$$ حيث ه طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث:

مثال

(١) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق(∠أ) = ٧٥°، ق(∠ب) = ٣٤°، أ = ١٠,٢سم، أوجد كلًّا من ب، جـ لأقرب سنتيمتر.

الحل

∵ أ + ب + جـ = ١٨٠°

∴ جـ = ١٨٠° - (أ + ب) = ١٨٠ - (٧٥° + ٣٤°)

= ٧١°

∵ $\frac{أ}{\text{حا}\, أ} = \frac{ب}{\text{حا}\, ب} = \frac{جـ}{\text{حا}\, جـ}$ ∴ $\frac{١٠,٢}{\text{حا}\, ٧٥°} = \frac{ب}{\text{حا}\, ٣٤°} = \frac{جـ}{\text{حا}\, ٧١°}$

ب = $\frac{١٠,٢ \times \text{حا}\, ٣٤°}{\text{حا}\, ٧٥°}$ ≃ ٥,٩سم

باستخدام الآلة الحاسبة

10.2 × sin 34 ,,,) ÷ sin 75 ,,,) =

جـ = $\frac{١٠,٢ \times \text{حا}\, ٧١°}{\text{حا}\, ٧٥°}$ ≃ ٩,٩٨سم

باستخدام الآلة الحاسبة

10.2 × sin 71 ,,,) ÷ sin 75 ,,,) =

حاول أن تحل

(١) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق(∠جـ) = ٦١°، ق(∠ب) = ٧١°، ب = ٩١سم، فأوجد كل من أ ، جـ.

إيجاد طول أكبر ضلع فى المثلث

مثال

(٢) أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٤٩° ١١′ ،
ق(∠ب) = ٧٦° ١٧′ ، جـ = ١١,٢٢سم

الحل

∵ جـ = ١٨٠° - (أ + ب)

= ١٨٠° - (٤٩° ١١′ + ٧٦° ١٧′) = ٥٤° ٣٢′

∴ أكبر ضلع هو المقابل لزاوية ب، أىْ أنّ المطلوب هو إيجاد ب

∵ $\frac{ب}{\text{حا}\, ب} = \frac{جـ}{\text{حا}\, جـ}$ ∴ $\frac{ب}{\text{حا}\, ٧٦° ١٧′} = \frac{١١,٢٢}{\text{حا}\, ٥٤° ٣٢′}$

∴ ب = $\frac{١١,٢٢ \times \text{حا}\, ٧٦° ١٧′}{\text{حا}\, ٥٤° ٣٢′}$ ≃ ١٣,٤سم

تذكر أن

أكبر ضلع فى المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية والعكس أكبر زاوية فى المثلث هى المقابلة لأكبر ضلع.

حاول أن تحل

(٢) أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب جـ، الذى فيه ق(∠أ) = ٤٣°، ق(∠ب) = ٦٥°، جـ = ٨,٤سم

حل المثلث باستخدام قانون الجيب

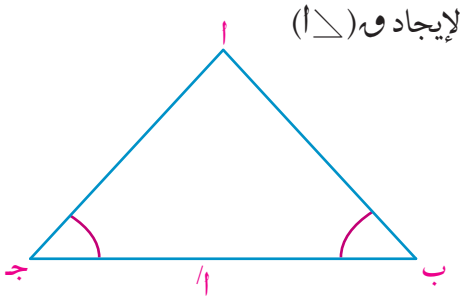
Solving the triangle using the sine rule

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات العناصر المجهولة فيه إذا عُلِمَ منه ثلاثة عناصر من العناصر الستة بشرط أنْ يكون من بين العناصر المعلومة طول أحد الأضلاع على الأقل، لأنه لايمكن حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسات ثلاث زوايا، ويسمح لنا قانون الجيب بحل المثلث، إذا عُلِمَ منه قياسا زاويتين وطول ضلع.

حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسا زاويتين وطول ضلع:

لاحظ أنه لحل المثلث أ ب جـ إذا عُلِمَ فيه قياسا الزاويتين ب، جـ والطول أ نتبع التالى:

١- نستخدم العلاقة ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠° لإيجاد ق(∠أ)



٢- نستخدم قانون الجيب: $\frac{أ}{\text{حا أ}} = \frac{ب}{\text{حا ب}}$ لإيجاد ب

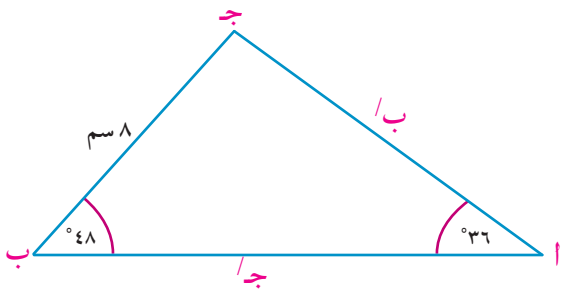
٣- نستخدم قانون الجيب: $\frac{أ}{\text{حا أ}} = \frac{جـ}{\text{حا جـ}}$ لإيجاد جـ

وفيما يلى أمثلة توضِّح ذلك:

مثال

(٣) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٣٦°، ق(∠ب) = ٤٨°، أ = ٨سم

الحل



ق(∠جـ) = ١٨٠° - (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°

∵ $\frac{أ}{\text{حا أ}} = \frac{ب}{\text{حا ب}}$ ∴ $\frac{٨}{\text{حا ٣٦°}} = \frac{ب}{\text{حا ٤٨°}}$

∵ ب = $\frac{٨ \times \text{حا ٤٨°}}{\text{حا ٣٦°}}$ ∴ ب ≃ ١٠,١١٤سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

8	×	sin	48	,,,	)	÷	sin	36	,,,	)	=

∵ $\frac{أ}{\text{حا أ}} = \frac{جـ}{\text{حا جـ}}$ ∴ $\frac{٨}{\text{حا ٣٦°}} = \frac{جـ}{\text{حا ٩٦°}}$

∴ جـ = $\frac{٨ \times \text{حا ٩٦°}}{\text{حا ٣٦°}}$ ≃ ١٣,٥٣٥سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

8	×	sin	96	,,,	)	÷	sin	36	,,,	)	=

حاول أن تحل

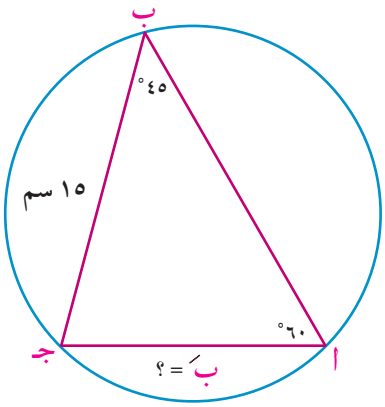
(٣) حل المثلث س ص ع فيه ص = ١٠٧,٢سم، ق(∠س) = ٣٣° ١٦′، ق(∠ع) = ٤٤° ١٩′

تطبيقات هندسية

Geometrical applications

مثال

(٤) أ ب جـ مثلث أَ = ١٥سم، ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، أوجد ق(∠جـ)، وكل من بَ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ



الحل

ق(∠جـ) = ١٨٠° - [٦٠° + ٤٥°]

= ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥°

∵ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}}$ ∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ٤٥°}} = \frac{١٥}{\text{حا ٦٠°}}$

$\text{بَ} = \frac{١٥ \times \text{حا ٤٥°}}{\text{حا ٦٠°}}$

$= \frac{١٥ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٣٠}{\sqrt{٦}} \times \frac{\sqrt{٦}}{٦} = \frac{٣٠\sqrt{٦}}{٦} = ٥\sqrt{٦}$ سم

∵ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = ٢\text{ق}$ ∴ $\frac{٥\sqrt{٦}}{\text{حا ٤٥°}} = ٢\text{ق}$

∴ $\frac{٥\sqrt{٦}}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = ٢\text{ق}$ ∴ $٥\sqrt{١٢} = ٢\text{ق}$

∴ ٥(٢√٣) = ٢ق ∴ ق = ٥√٣ سم

تَذكَّر أنَّ

حا ٤٥° = حتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٤٥° = ١

حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$، حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا ٦٠° = √٣

حاول أن تحل

(٤) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٤° ٢٣′، ق(∠ب) = ٧٢° ٢٣′، جـ = ١٨سم، أوجد كل من أَ ، بَ وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ .

تذكر أن

مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما

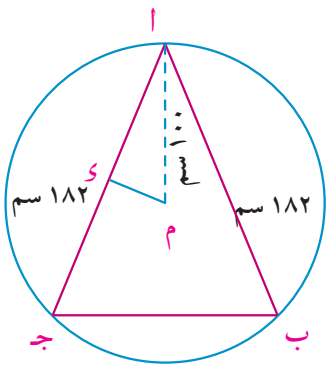
مثال

(٥) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٨٢سم مرسوم داخل دائرة مركزها م، وطول نصف قُطرها ١٠٠سم أوجد

(أ) طول القاعدة ب جـ

(ب) مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر مربَّع.

الحل



في Δ أ ب جـ يكون:

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{حا ب}} = ٢\text{ق}$

$\frac{١٨٢}{\text{حا ب}} = ٢٠٠$ حا ب = ٠,٩١

∴ ق(∠ب) = ٦٥° ٣٠′ ١٩″

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° - (٢ × ١٩′ ٣٠° ٦٥) (ق(∠ب) = ق(∠جـ) لأن المثلث أ ب جـ متساوى الساقين)

= ٢٢″ ٥٩′ ٤٨°

∴ ب جـ / حا ٢٢″ ٥٩′ ٤٨° = ١٨٢ / حا ١٩′ ٣٠° ٦٥ ∴ ب جـ = ١٨٢ × حا ٢٢″ ٥٩′ ٤٨° / حا ١٩′ ٣٠° ٦٥ ≃ ١٥٠,٩ سم

مساحة المثلث أ ب جـ = ½ أ ب × أ جـ حا أ

= ½ × ١٨٢ × ١٨٢ حا ٢٢″ ٥٩′ ٤٨° ≃ ١٢٥٠٠ سم٢

حاول أن تحل

(٥) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠,٣سم، مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٨,٤سم أوجد:

أ طول القاعدة ب جـ

ب مساحة سطح المثلث أ ب جـ

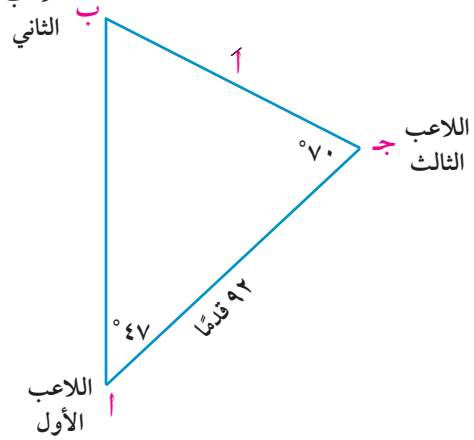
تطبيقات حياتية على قاعدة الجيب

Life applications on the sine rule

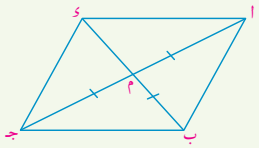
يُمكن حل كَثير من المسائل التى تَحتوى على زوايا ومسافات بتركيب مثلث على هذا الموقف، ثم حل المثلث.

مثال

(٦) **الربط بالرياضة:** يُمثِّل الشكل المقابل ثلاثة لاعبين من فريق كرة القدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثانى واللاعب الثالث لأقرب قدم.



إرشاد



مساحة سطح متوازى الاضلاع

أ ب جـ ء = ٢ م(△أ ب جـ)

ومساحة △أ ب جـ =

½ أ ب × أ جـ حا ب أ جـ

الحل

ق(∠ب) = ١٨٠° - (٧٠° + ٤٧°) = ٦٣°

والمسافة بين اللاعب الثانى واللاعب الثالث هى أ

فيكون: أ / حا ٤٧° = ٩٢ / حا ٦٣° ∴ أ = ٩٢ × حا ٤٧° / حا ٦٣° ≃ ٧٦ قدمًا

المسافة بين اللاعب الثانى واللاعب الثالث هو تقريبًا ٧٦ قدمًا

حاول أن تحل

(٦) أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثانى لأقرب قدم.

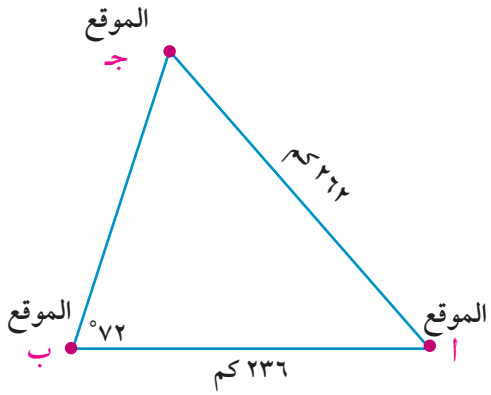
مثال

(٧) **الربط بالجغرافيا:** فى الشكل التالى ثلاثة مواقع جغرافية تُشكل مثلثًا، إذا كانت المسافة بين الموقع أ، والموقع ب، ٢٣٦ كم، والمسافة بين الموقع أ والموقع جـ، ٢٦٢ كم، وكان قياس الزاوية عند الموقع ب يساوى ٧٢°، أوجد:

أ قياس الزاوية عند الموقع أ.

ب المسافة بين الموقع جـ والموقع ب.

جـ مساحة الأرض التى تمثل المواقع أ، ب، جـ رؤوسًا لها.



الحل

أ $\frac{٢٦٢}{\text{حا } ٧٢^\circ} = \frac{٢٣٦}{\text{حا جـ}}$

$\text{حا جـ} = \frac{٢٣٦ \times \text{حا } ٧٢^\circ}{٢٦٢}$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{جـ}) = \text{حا}^{-١} \left(\frac{٢٣٦ \times \text{حا } ٧٢^\circ}{٢٦٢}\right)$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{جـ}) = ٥٨^\circ ٥٦' ٤٤''$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{أ}) = ١٨٠ - (٥٨^\circ ٥٦' ٤٤'' + ٧٢^\circ) = ٤٩^\circ ٣' ١٦''$ (١)

ب $\frac{\text{ب جـ}}{\text{حا } ٤٩^\circ ٣' ١٦''} = \frac{٢٦٢}{\text{حا } ٧٢^\circ}$

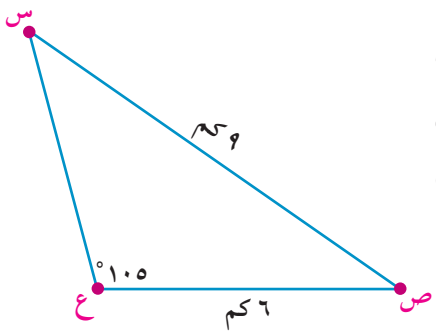
$\therefore \text{ب جـ} = \frac{٢٦٢ \times \text{حا } ٤٩^\circ ٣' ١٦''}{\text{حا } ٧٢^\circ} \simeq ٢٠٨,١$ كم (٢)

جـ مساحة الارض التى تمثل المواقع أ، ب، جـ رؤوسا لها

$= \frac{١}{٢} \times ٢٦٢ \times ٢٣٦ \times \text{حا } ٤٩^\circ ٣' ١٦'' \simeq ٢٣٣٥١,٨٦$ كم مربع.

حاول أن تحل

(٧) فى الشكل المقابل ثلاثة مواقع جغرافية تشكل مثلثًا، إذا كانت المسافة بين الموقع س والموقع ص تُساوى ٩ كم ، والمسافة بين الموقع ص والموقع ع تُساوى ٦ كم ، وقياس الزاوية عند الموقع ع تُساوى ١٠٥°، فأوجد:

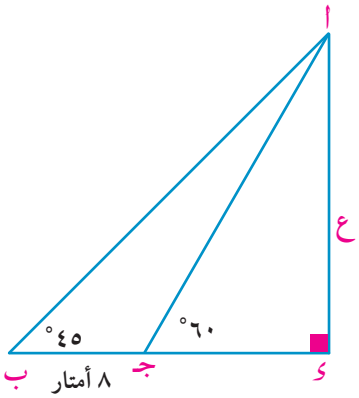


أ قياس الزاوية عند الموقع ص.

ب المسافة بين الموقع س والموقع ع.

جـ مساحة المثلث الذى رؤوسة المواقع الثلاثة س، ص، ع

مثال



٨ **الربط التسلق:** في الشكل المقابل :يقف عادل وكريم أمام جدار صخرى للتسلق عليه وكانت المسافة بينهما ٨ أمتار، كما هو مبين بالشكل المجاور. ما ارتفاع الجدار الصخرى مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

الحل

فى المثلث أ ب جـ

و(∠ جـ أ ب) = ٦٠° - ٤٥° = ١٥°

$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{حا ٤٥°}} = \frac{٨}{\text{حا ١٥°}}$$

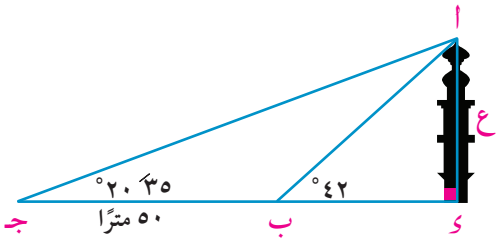
$$\therefore \text{أ جـ} = \frac{٨ \text{ حا ٤٥°}}{\text{حا ١٥°}} = ٢١,٨٦ \text{ متر}$$

فى المثلث أ ء جـ القائم الزاوية فى ء

$$\text{حا ٦٠°} = \frac{\text{ع}}{\text{أ جـ}}$$

∴ ع = أ جـ حا ٦٠° = ٢١,٨٦ حا ٦٠° ≃ ١٨,٩ مترًا

حاول أن تحل



٨ يقف أحمد وصلاح أمام مئذنة وكانت المسافة بينهما ٥٠مترًا، كما هو مبين بالشكل المجاور. ما ارتفاع المئذنة لأقرب جزء من عشرة من المتر.

تمـــاريـن الدرس الأول

أكمل:

(١) فى أيِّ مثلث تَتناسب أطوال أضلاع المثلث مع

(٢) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٠√٢ سم ، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث تُساوى

(٣) مثلث أ ب جـ فيه و(∠أ) = ٦٠°، و(∠جـ) = ٤٠°، جـَ = ٨,٤سم فإن أَ = ... سم

(٤) فى المثلث أ ب جـ يكون $\frac{\text{ب}}{\text{حا ب}}$ = ... و

(٥) دائرة طول قطرها ٢٠سم، تمر برؤوس المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه ب جـ = ١٠سم فإن و(∠أ) = ... °

(٦) إذا كانت مساحة المثلث س ص ع تساوى Δ، و طول نصف قُطر الدائرة المارة برؤوسة فإن $\frac{\text{٤ و}^{٢}\Delta}{\text{س ص ع}}$ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(٧) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه و(∠أ) = ٣٠°، أَ = ١٠سم هو

أ ١٠سم ب ٢٠سم جـ ٥سم د ٤٠سم

(٨) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٤سم، و(∠أ) = ٣٠° فإن طول أَ هو

أ ٤سم ب ٢سم جـ ٤√٣ د $\frac{١}{١٦}$

(٩) فى المثلث أ ب جـ يكون المقدار ٢و حاأ مساويًا

أ أَ ب بَ جـ جـَ د مـ(Δأ ب جـ)

(١٠) إذا كانت و هى طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{\text{صَ}}{\text{حا ص}}$ يساوى

أ و ب ٢ و جـ $\frac{١}{٢}$و د ٤ و

(١١) المثلث ل م ن فيه، و(ل) = ٣٠°، م ن = ٧سم، فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسة تساوى:

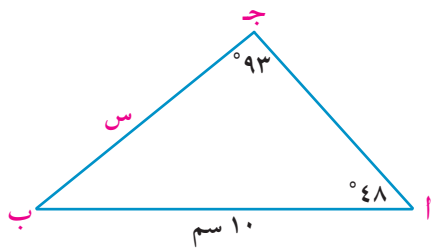
أ ٧سم ب ٣,٥سم جـ ١٤سم د $\frac{١٤}{٣\sqrt{}}$

(١٢) فى المثلث س ص ع إذا كانت ٢ حا س = ٣ حا ص = ٤ حا ع فإن سَ : صَ : عَ تساوى

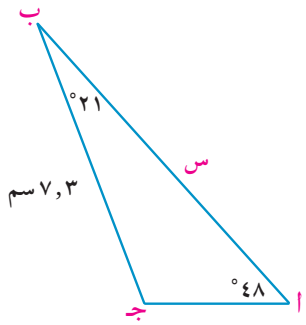
أ ٢ : ٣ : ٤ ب ٦ : ٤ : ٣ جـ ٣ : ٤ : ٦ د ٤ : ٣ : ٢

(١٣) باستخدام قانون الجيب أوجد قياس س لأقرب جزء من عشرة.

أ



ب



حل كُلَّ مثلث أ ب جـ باستخدام قانون الجيب إذا عَلِمتَ أن:

(١٤) ق(∠أ) = ٧٥°، ق(∠ب) = ٣٤°، أ = ١٠,٢سم

(١٥) ق(∠أ) = ١٩°، ق(∠جـ) = ١٠٥°، جـ = ١١,١سم

(١٦) ق(∠أ) = ١١٦°، ق(∠جـ) = ١٨°، أ = ١٧سم

(١٧) ق(∠أ) = ٣٦°، ق(∠ب) = ٧٧°، ب = ٢,٥سم

(١٨) ق(∠أ) = ١١ ٤٩°، ق(∠ب) = ١٧ ٦٧°، جـ = ١١,٢٢سم

(١٩) ق(∠ب) = ٤ ١١٥°، ق(∠جـ) = ١٧ ١١°، جـ = ٥١٦,٢سم

(٢٠) أ = ٧سم، جـ = ١١سم، ق(∠جـ) = ٧ ٢٢°

(٢١) ب = ١٥,١٣سم، جـ = ١١,٦٢سم، ق(∠ب) = ١٧ ٨٥°

أوجد طول قُطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ فى كُلِّ حالة مما يلى:

(٢٢) ق(∠أ) = ٧٥°، ق(∠ب) = ٤٨°، أ = ٢١سم

(٢٣) ق(∠جـ) = ١٠٠°، ق(∠ب) = ٥٠°، ب = ٩٠سم

(٢٤) ق(∠أ) = ٢٠°، ق(∠جـ) = ١٠٢°، جـ = ١١سم

(٢٥) ق(∠أ) = ٧٠°، ق(∠جـ) = ٣٥°، أ = ٨,٥سم

(٢٦) أ = ١٦سم، ب = ١٤سم، ق(∠ب) = ٤٠°

فى كُلِّ مثلث أ ب جـ، أوجد قياسات زاويتى ب، جـ التى تُحقق الشروط المعطاة، ارسم أشكالًا لتساعدك فى تقرير ما إذا كان هناك مثلثان ممكنين أم مثلث واحد.

(٢٧) ق(∠أ) = ٦٢°، أ = ٣٠سم، ب = ٣٢سم

(٢٨) ق(∠ب) = ٤٨°، أ = ٩٣سم، ب = ١٢٥سم

(٢٩) ق(∠أ) = ٢٣,٦°، أ = ٩,٨سم، ب = ١٧سم

(٣٠) فى المثلث أ ب جـ، ق(∠أ) = ٢٢ ٦٧°، ق(∠جـ) = ٣٣ ٤٤°، ب = ١٠٠ سم، أوجد محيط المثلث أ ب جـ ومساحة سطحه.

(٣١) في المثلث س ص ع إذا كان ص = ٦٨,٤سم، ق(∠ص) = ١٠٠°، ق(∠ع) = ٤٠° ، أوجد س وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع، ثم أوجد مساحة سطح المثلث .

(٣٢) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٣٧ ٢٢°، ق(∠ب) = ٢٣ ٦٧° ومحيطه ٣٠سم أوجد كل من أ، ب لأقرب سنتيمتر

(٣٣) أ ب جـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠سم٢، ق(∠ب) = ٨٢°، ق(∠جـ) = ٥٦° ، أوجد قيمة أ

٣٤ أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٨,٦سم، ق(∠ جـ أ ب) = ٣٦ َ٢٢ °، ق(∠ ء ب أ) = ٤٤ َ٣٨ °، أوجد طول القطر $\overline{أ جـ}$ ومساحة سطح متوازى الأضلاع.

٣٥ أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ء = ٢٢,٣سم، ق(∠ ء) = ١١٥ °، ق(∠ أ جـ ب) = ٣٢ َ١٥ °، ق(∠ ب) = ٦٦ °، احسب طول كل من $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{جـ ب}$.

٣٦ أ ب جـ ء هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦سم، أوجد طول قطره $\overline{أ جـ}$.

٣٧ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران فى دائرة طولاهما ٤٣,٥سم، ٥٢,١سم، مرسومان فى جهتين مختلفتين من القطر $\overline{أ ء}$ الذى طوله ١٠٠سم أوجد:

أ ق(∠ ب أ جـ)　　ب طول $\overline{ب جـ}$

٣٨ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ق(∠ ب جـ ء) = ٨٥ °، ق(∠ جـ ء أ) = ٨٧ °، ق(∠ ب جـ أ) = ٣٦ °، ق(∠ ب ء أ) = ٥٥ °، جـ ء = ١٠٠سم ، أوجد طول كل من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أ جـ}$

٣٩ أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥٨سم، ق(∠ ب) = ٣٨ °، ق(∠ جـ) = ٦٢ ° ، أوجد طول العمود النازل من أ على $\overline{ب جـ}$.

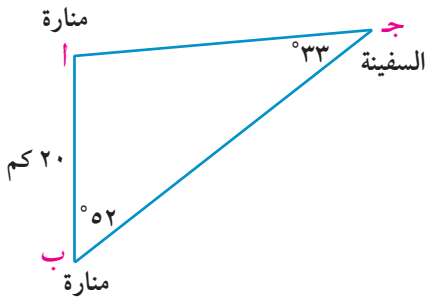
٤٠ أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ أ) = ٦٠ °، ق(∠ ب) = ٤٥ °، فإذا كان أَ + بَ = (٢ + $\sqrt{٦}$)سم، فأوجد كل من أَ ، بَ

٤١ أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$، أ ء = ١٠,٧سم، ق(∠ ء) = ١٠٠ °، ق(∠ ب) = ٦١ َ١٩ °، ق(∠ جـ أ ء) = ٣٣ َ٥٠ °، أوجد طول كلٍّ من $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب جـ}$

٤٢ قطعة أرض على شكل مثلث أ ب جـ فيه أَ = ٩٠ مترًا، ق(∠ ب) = ٥٣ َ٨ °، ق(∠ أ) = ٦٤ َ٩ °، أوجد محيط هذه القطعة ومساحتها.

تفكير إبداعى :

٤٣ منارتان أ، ب المسافة بينهما ٢٠ كم على خط واحد من الشمال إلى الجنوب، إذا كان قائد سفينة فى الموقع جـ، بحيث ق(∠ أ جـ ب) = ٣٣ ° وعامل راديو فى الموقع ب بحيث ق(∠ أ ب جـ) = ٥٢ ° ، فأوجد المسافة بين السفينة وكلٍّ من المنارتين.



الوحدة الرابعة

الدرس ٢

قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine rule

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التمام.

المصطلحات الأساسية

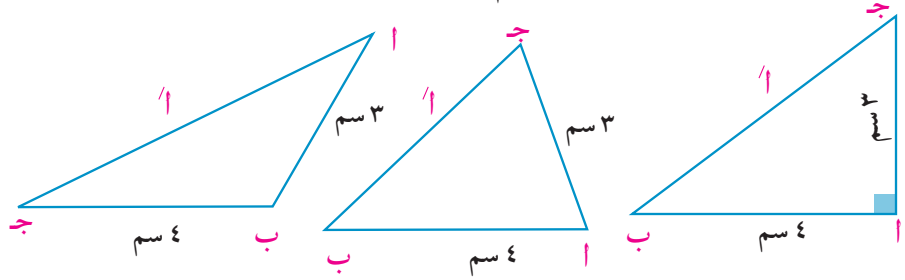
- قاعدة جيب التمام *Cosine rule*
- زاوية حادة *Acute angle*
- زاوية منفرجة *Obtuse angle*
- زاوية قائمة *Right angle*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

كل من المثلثات التالية لها ضلعان طولهما ٣سم، ٤سم ، فى شكل (١)، ق(∠أ) قائمة، وبالتالى يمكن إيجاد طول أَ باستخدام نظرية فيثاغورث.



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

أ من شكل (١) أوجد أَ.

ب ما القيم الممكنة لـأَ في حالة ما تكون ∠أ زاوية حادة (شكل ٢) ؟

جـ ما القيم الممكنة لـأَ فى حالة ماتكون ∠أ زاوية منفرجة (شكل ٣) ؟

د هل يمكن حل المثلثين فى شكلى (٢) ، (٣) إذا علمت ق(∠أ) باستخدام قانون الجيب ؟ فسرِّ إجابتك.

يُساعدنا قانون (قاعدة) جيب التمام فى حَلِّ مثل هذه المثلثات ، حيث يَربط طولَ ضلع أىِّ مثلث بقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع.

تعلم

قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine rule

يَنص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه :

فى أىِّ مثلث أ ب جـ يكون :

$أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ ب جـ$ حتا أ ومنه حتا أ $= \frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$

، $ب^{٢} = جـ^{٢} + أ^{٢} - ٢ جـ أ$ حتا ب ومنه حتا ب $= \frac{جـ^{٢} + أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ جـ أ}$

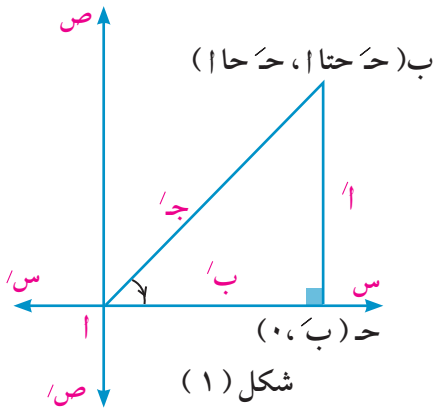
، $جـ^{٢} + أ^{٢} + ب^{٢} - ٢ أ ب$ حتا جـ ومنه حتا جـ $= \frac{أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}}{٢ أ ب}$

وليكن المطلوب إثبات أن : $أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ ب جـ$ حتا أ ، حتا أ $= \frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$

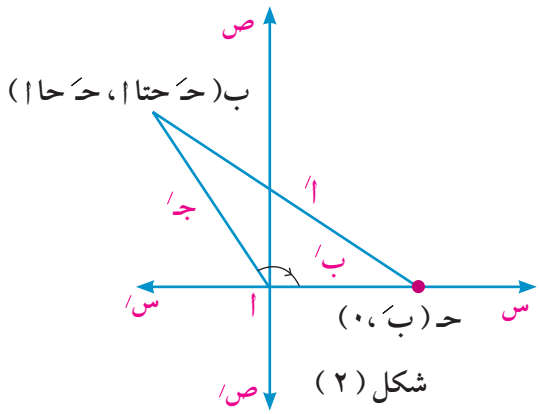
البرهان :

(لا يمتحن فيه الطالب)

ارسم المثلث أ ب جـ على المستوى الإحداثى، بحيث يكون قاعدته $\overline{أجـ}$ على محور السينات ورأسه أ عند نقطة الأصل، وذلك كما فى شكل (١) ، (٢) التاليان :



شكل (١)



شكل (٢)

البعد بين النقطتين ب(حـَ حتا أ ، حـَ حا أ) ، حـ (بَ ، ٠) هو

$(أَ)^{٢} = (حـَ حتا أ - بَ)^{٢} + (حـَ حا أ - ٠)^{٢}$ **(قانون البعد بين نقطتين)**

$= حـَ^{٢} حتا^{٢} أ - ٢ بَ جـَ حتا أ + بَ^{٢} + حـَ^{٢} حا^{٢} أ$

$= بَ^{٢} + حـَ^{٢} (حتا^{٢} أ + حا^{٢} أ) - ٢ بَ حـَ حتا أ$ (حتا^{٢} حـ + حا^{٢} حـ = ١)

$= بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ حتا أ$

∴ $أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ حتا أ$ ومنه $حتا أ = \frac{بَ^{٢} + جـَ^{٢} - أَ^{٢}}{٢ بَ جـَ}$

حاول أن تحل

(١) بطريقة مماثلة لما سبق ضع الرأس ب عند نقطة الأصل واستنتج أنَّ :
$بَ^{٢} = جـَ^{٢} + أَ^{٢} - ٢ جـَ أَ حتا ب$

(٢) بطريقة مماثلة لما سبق ضع الرأس جـ عند نقطة الأصل واستنتج أنَّ :
$جـَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢} - ٢ أَ بَ حتا جـ$

(٣) هل قانون (قاعدة) جيب التمام صحيح فى حالة المثلث القائم الزاوية ؟ فسِّر إجابتك.

إرشاد

يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بقانون جيب التمام أن تؤخذ الأطوال أَ، بَ جـَ فى ترتيب دورى واحد حتى يَسهل تذكُّرها.

نشاط

ابحث فى مكتبتك المدرسية أو باستخدام الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)، عن براهين أخرى لقانون (قاعدة) جيب التمام ، ثم ناقش معلمك فيما توصَّلت إليه .

إيجاد طول الضلع الثالث فى مثلث.

مثال

(١) س ص ع مثلث فيه س = ٢٤,٣سم ، ص = ٢٢,٨سم ، ق(∠ع) = ٤٢° أوجد ع

الحل

ع^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} - ٢س ص حتا ع

= (٢٤,٣)^{٢} + (٢٢,٨)^{٢} - ٢ × ٢٤,٣ × ٢٢,٨ حتا ٤٢°

≃ ١٦,٩ سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى :

ابدأ ← 24.3 χ^2 + 22.8 χ^2 − 2 × 24.3 × 22.8 cos 42°) =

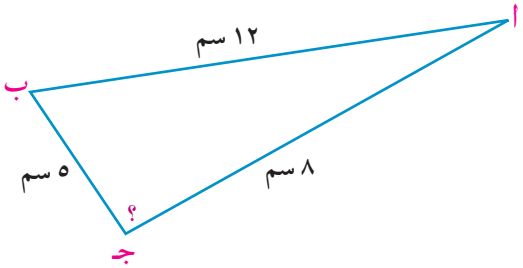
حاول أن تحل

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ = ٧٢,٨ سم ، ب = ٥٨,٤سم ، ق(∠جـ) = ٦٤,٨° أوجد جـ.

إيجاد قياس زاوية فى المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

مثال

(٢) من الشكل المقابل، أوجد ق(∠جـ)



الحل

$$\text{حتا جـ} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}}{٢\,\text{أ ب}}$$

$$= \frac{(٥)^{٢} + (٨)^{٢} - (١٢)^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٨}$$

$$= \frac{-٥٥}{٨٠}$$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى

ابدأ ← 5 χ^2 + 8 χ^2 − 12 χ^2 ÷ (2 × 5 × 8) =

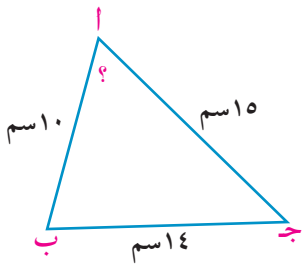
SHIFT cos = ...

ونلاحظ أن جيب تمام الزاوية سالب وبالتالى ∠جـ منفرجة فيكون

ق(∠جـ) ≃ ١٣٣° ٢٥′ ٥٧″

حاول أن تحل

(٥) من الشكل المقابل أوجد ق(∠أ)



مثال

(٣) أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث ل م ن ، إذا عُلِمَ أنَّ ل = ٧,٥سم ، م = ١٢,٥سم، ن = ١٧,٥سم، ومن ذلك أثبت أنه فى هذا المثلث يكون :

حتا ن - ٣ √٣ حا ن + ٥ = ٠

الحل

أكبر زاوية هى المقابلة لأكبر ضلع ؛ لذلك تكون ∠ ن هى أكبر زاوية فى المثلث

ويكون : حتا ن = $\frac{ل^{٢} + م^{٢} - ن^{٢}}{٢ ل م}$ = $\frac{(١٢,٥)^{٢} - (١٧,٥)^{٢} + (٧,٥)^{٢}}{١٢,٥ \times ٧,٥ \times ٢}$ = $-\frac{١}{٢}$

∴ حتا ن = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ن) = ١٢٠°

الطرف الأيسر = حتا ن - $\sqrt{٣}$ حا ن + ٥ = حتا ١٢٠° - $\sqrt{٣}$ حا ١٢٠° + ٥

= $-\frac{١}{٢}$ - $\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٥ = صفر = الطرف الأيمن.

تذكر أن

حتا ١٢٠° = حتا (١٨٠° - ٦٠°)

= - حتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

حا ١٢٠ = حا (١٨٠° - ٦٠°)

= حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حاول أن تحل

٦ المثلث أ ب جـ إذا كان أ = ١٢ سم ، ب = ١٥سم ، جـ = ١٨ سم ، أثبت أن ق(∠جـ) = ٢ ق(∠ أ)

استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام فى حل المثلث

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما وفى هذه الحالة يوجد مثلث وحيد.

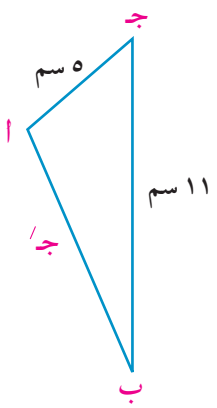
حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

Solving the triangle in the terms of the lengths of two sides and measure of the angle included

مثال

٤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ١١سم ، ب = ٥سم ، ق(∠جـ) = ٢٠°

الحل



∵ جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - ٢أب حتا جـ

∴ جـ^{٢} = $(١١)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ \times ١١ \times ٥$ حتا ٢٠°

∴ جـ = $\sqrt{(١١)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ \times ١١ \times ٥ \text{ حتا } ٢٠}$

≃ ٦,٥٢٩سم

حتا أ = $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$

= $\frac{(٥)^{٢} + (٦,٥٢٩)^{٢} - (١١)^{٢}}{٦,٥٢٩ \times ٥ \times ٢}$ ≃ -٠,٨١٧

∴ ق(∠أ) ≃ ١٤٤,٧٨٦°

ق(∠ب) = ١٨٠° - [ق(∠أ) + ق(∠جـ)]

= ١٨٠° - [١٤٤,٧٨٦° + ٢٠°]

= ١٥,٢١٤°

∴ جـ = ٦,٥٢٩ ، ق(∠أ) = ١٤٤° ٤٧′ ٩٦″

ق(∠ب) ≃ ١٥° ١٢′ ٥٠″

تذكر أن

حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة، وفى هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد كل من حـ ، ق(∠أ) ، ق(∠ب)

لاحظ أن

عند إيجاد قياس زاوية فى مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة، يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلاً من استخدام قانون الجيب، وذلك لأن :

فى حالة استخدام قانون الجيب فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب.

أما فى حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه إذا كانت الزاوية منفرجة فإن جيب تمامها يكون سالبًا .

وإذا كانت الزاوية حادة فإن جيب تمامها يكون موجبًا

حاول أن تحل

(٧) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ٢٤,٦سم ، جـ = ١٤,٢سم ، ق(∠ب) = ٤٢°١٨′

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث أيضًا بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة ، علمًا بأن مجموع طولى أى ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث، وفى هذه الحالة يوجد مثلث وحيد.

حل المثلث بمعلومية أطوال اضلاعه الثلاثة

Solving the triangle knowing its three side lengths

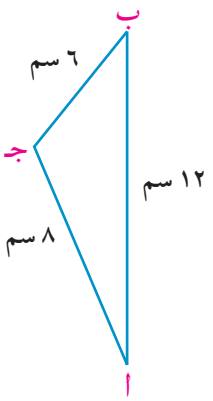
مثال

(٥) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ٦سم ، ب = ٨سم ، جـ = ١٢سم

تذكر أن

حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة، وفى هذه الحالة يكون المطلوب هو إيجاد كل من ق(∠أ)، ق(∠ب)

الحل



المطلوب إيجاد قياسات زوايا المثلث الثلاثة فيكون:

حتا أ = $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$ = $\frac{(٨)^{٢} + (١٢)^{٢} - (٦)^{٢}}{٢ \times ٨ \times ١٢}$

= $\frac{٤٣}{٤٨}$

∴ ق (∠أ) ≃ ٢٦°٢٣′٤″

حتا ب = $\frac{جـ^{٢} + أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ جـ أ}$ = $\frac{(١٢)^{٢} + (٦)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ \times ١٢ \times ٦}$

= $\frac{٢٩}{٣٦}$

∴ ق (∠ب) ≃ ٣٦°٢٠′١٠″

∴ ق (∠جـ) = ١٨٠° - [٢٦°٢٣′٤″ + ٣٦°٢٠′١٠″]

= ١١٧°١٦′٤٦″

حاول أن تحل

(٨) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ١٢،٢ سم ، ب = ١٨,٤سم ، جـ = ٢١,١ سم

الكتابة فى الرياضيات

افرض أنك تَعلَم قياسات الزوايا الثلاثة فى مثلث ما ، فهل يمكنك استخدام قانون جيب التمام أم قانون الجيب لإيجاد طول ضلع فى هذا المثلث ؟ فسِّر إجابتك.

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام

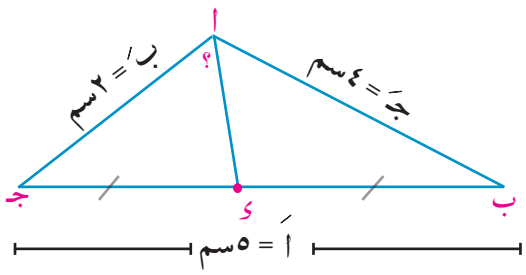
Geometrical applications on the cosine rule

مثال

(٦) أ ب جـ مثلث فيه أ = ٥سم ، ب = ٢سم ، جـ = ٤سم ، نصف $\overline{ب جـ}$ فى ء ثم صل $\overline{أ ء}$ ، أوجد : ق(∠جـ) ، ق(∠ جـ أ ء)

الحل

في المثلث أ ب جـ



$$\text{حتا جـ} = \frac{\text{أ ب}^2 + \text{ب جـ}^2 - \text{أ جـ}^2}{2 \times \text{أ ب} \times \text{ب جـ}}$$

$$= \frac{(٥)^2 + (٢)^2 - (٤)^2}{٢ \times ٥ \times ٢} = \frac{١٣}{٢٠}$$

∴ ق (∠جـ) ≃ ٤٩° ٢٧′ ٣٠″

في المثلث أ ء جـ

$$(\text{أ ء})^2 = (\text{ء جـ})^2 + (\text{أ جـ})^2 - 2\,\text{ء جـ} \times \text{جـ أ} \times \text{حتا جـ}$$

$$= (\frac{٥}{٢})^2 + (٢)^2 - ٢ \times \frac{٥}{٢} \times ٢ \times \text{حتا } ٤٩° ٢٧′ ٣٠″$$

$$\simeq ٣,٧٤٩٩$$

∴ أ ء ≃ ١,٩٤ سم

$$\therefore \frac{١,٩٤}{\text{حا } ٤٩° ٢٧′ ٣٠″} = \frac{٢,٥}{\text{حا جـ أ ء}}$$

$$\therefore \text{حا جـ أ ء} = \frac{٢,٥ \times \text{حا } ٤٩° ٢٧′ ٣٠″}{١,٩٤} \simeq ٠,٩٧٩$$

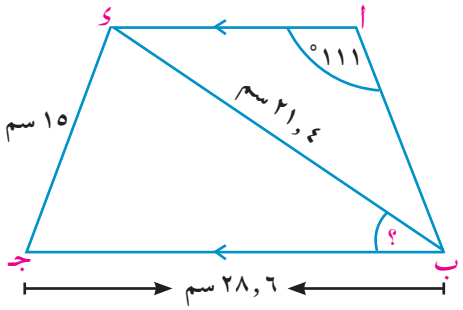
∴ ق(∠جـ أ ء) ≃ ٧٨° ١٤′ ١٤″

حاول أن تحل

(٩) أ ب جـ مثلث فيه ب جـ = ٢٠سم ، ق(∠ب) = ٢٩° ، ق(∠جـ) = ٧٣° ، ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أوجد طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

مثال

(٧) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ ء}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ب أ ء) = ١١١° ، ب جـ = ٢٨,٦سم ، جـ ء = ١٥سم، ء ب = ٢١,٤سم ، أوجد ق(∠ء ب جـ) ، وطول $\overline{\text{أ ء}}$.



الحل

في المثلث ء ب جـ

$$\text{حتا ء ب جـ} = \frac{(\text{ب جـ})^2 + (\text{ب ء})^2 - (\text{جـ ء})^2}{2\,\text{ب جـ} \times \text{ب ء}}$$

$$= \frac{(٢٨,٦)^2 + (٢١,٤)^2 - (١٥)^2}{٢١,٤ \times ٢٨,٦ \times ٢} \simeq ٠,٨٥٨٦$$

∴ ق (∠ء ب جـ) ≃ ٣٠° ٥٠′ ٢٥″

∵ $\overline{\text{أ ء}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$ قاطع لهما

∴ ق (∠أ ء ب) = ق (∠ء ب جـ) بالتبادل

∴ فى المثلث أ ب ء :

و (∠ أ ب ء) = ١٨٠ - (١١١° + ٢٥ ٥٠ ٣٠°)

= ٣٥ ٩ ٣٨°

ويكون :

$$\frac{\text{أ ء}}{\text{حا ٣٥ ٩ ٣٨°}} = \frac{٢١,٤}{\text{حا ١١١°}}$$

$$\therefore \text{أ ء} = \frac{٢١,٤ \times \text{حا ٣٥ ٩ ٣٨°}}{\text{حا ١١١°}}$$

≃ ١٤,١٦ سم

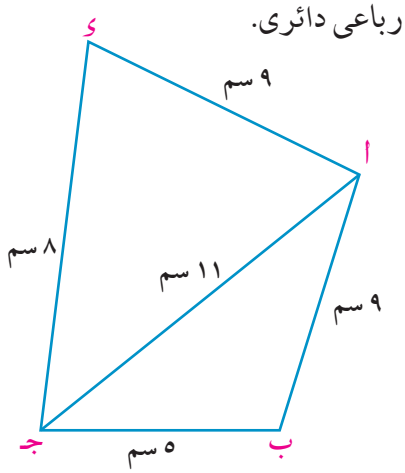
حاول أن تحل

(١٠) أ ب جـ ء شبه منحرف ، فيه $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب جـ = ٦٣سم ، أ ء = ٣٧سم ، و (∠ أ ب جـ) = ٤١° ، و (∠ ب أ جـ) = ١٠٥° ، أوجد طول $\overline{\text{جـ ء}}$.

مثال

(٨) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٥سم ، جـ ء = ٨ سم، ء أ = ٩سم، أ جـ = ١١سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

الحل



فى المثلث أ ب جـ

$$\text{حتا ب} = \frac{٩^٢ + ٥^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٥} = -\frac{١}{٦}$$

فى المثلث أ ء جـ

$$\text{حتا ء} = \frac{٩^٢ + ٨^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$$

ويكون حتا ء = - حتا ب

أى أنَّ و(∠ ء) + و(∠ ب) = ١٨٠°

وحيث إن ∠ ء ، ∠ ب زاويتان متقابلتان فى الشكل أ ب جـ ء ومتكاملتان

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

تذكر أن

الشكل الرباعى الدائرى هو شكل تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.

متى يكون الشكل "رباعى دائرى"؟

إذا وجد فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان.

إذا كان قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوسه تساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

إذا وجد فيه زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ومتساويتان فى القياس.

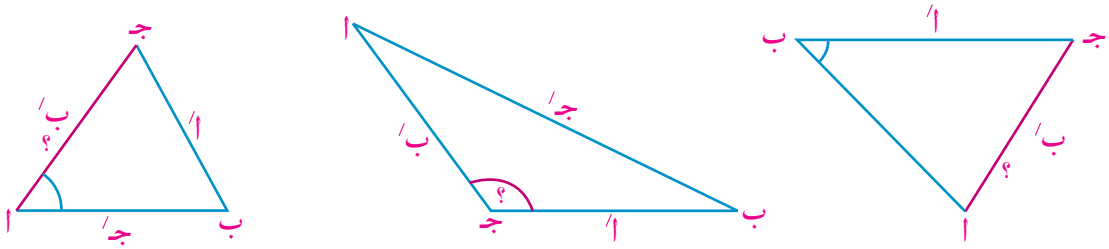
إذا كانت رؤوسه على بعد ثابت من نقطة ثابتة.

حاول أن تحل

(١١) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٢,٧سم ، أ جـ = ٧,٢ سم، ب جـ = ٦,٣سم، جـ ء = ٤,٥سم ، ب ء = ٧,٢سم.

أثبت أنَّ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

مناقشة: لكل من المثلثات التالية ، اكتب الصيغةَ الصحيحةَ لقانون الجيب أو قانون جيب التمام لإيجاد ما هو مطلوب (يشار إليه باللون الأحمر)، استخدم فقط المعلومات المعطاة والمشار إليها باللون الأزرق.

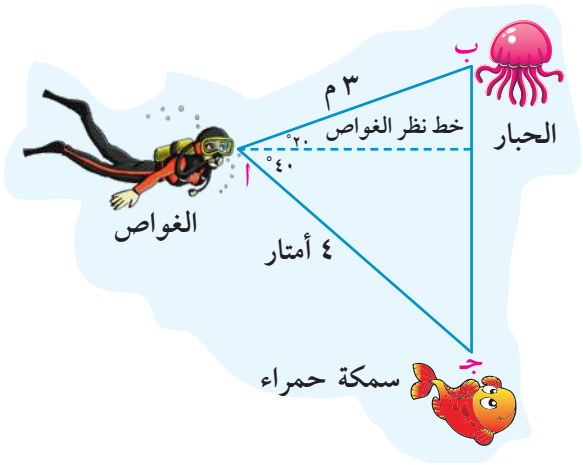


تَطبيقات حياتية على قانون جيب التمام

Life applications on the cosine rule

مثال

٩ الربط بالرياضة والسياحة: في الشكل المقابل يهوى أحد السائحين رياضة الغطس فى مياه البحر الأحمر ليشاهد الأعشاب المرجانية النادرة والأسماك الملونة الرائعة، وفى إحدى مرات الغوص نَظر الغواص لأعلى بزاوية قياسها ٢٠° فرأى حبارًا يَبعد عنه مسافة ٣ أمتار، وعندما نظر لأسفل بزاوية قياسها ٤٠ °رأى سمكة حمراء تَبعد عنه مسافة ٤ أمتار ، فما المسافة بين الحبار والسمكة الحمراء؟



الحل

واضح من الرسم أننا نَعلم طولى ضلعين فى المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما؛ لذا يمكننا استخدام قانون جيب التمام، وذلك كالآتى:

$$أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ ب جـ \text{ حتا } أ$$

$$= (٤)^{٢} + (٣)^{٢} - ٢ \times ٤ \times ٣ \text{ حتا } ٦٠°$$

$$= ١٣$$

$$\therefore أ \simeq ٣,٦ \text{ أمتار}$$

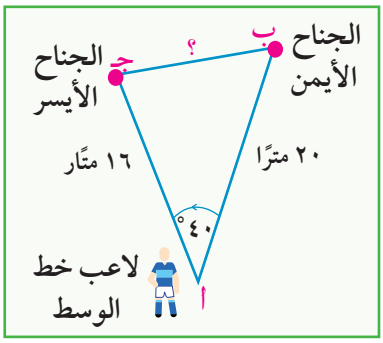
أىْ أنَّ المسافة بين الحبار والسمكة الحمراءُ يساوى ٣,٦ أمتار تقريبًا.

حاول أن تحل

١٢ الربط بالرياضة: يهوى هانى ركوب الدرجات ، فإذا سار بالدراجة مسافة ٦ كم فى اتجاه معين، ثم انعطف بزاوية قياسها ٧٩° ، ثم سار مسافة ٧ كم، ما المسافة بين النقطة التى بدأ منها هانى السير بالدراجة والنقطة التى وصل إليها مقربًا لأقرب كم؟

مثال

(١٠) **الربط بالرياضة:** فى إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط علي بعد ٢٠ مترًا من لاعب الجناح الأيمن، ودار لاعب خط الوسط بزاوية قياسها ٤٠°، فرأى لاعب الجناح الأيسر على بعد ١٦ مترًا منه ، ما المسافة بين لاعبى الجناحين ؟



الحل

ارسم شكلًا يُمثل المسألة وذلك كما هو موضَّح،

$أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ب جـ$ حتا أ

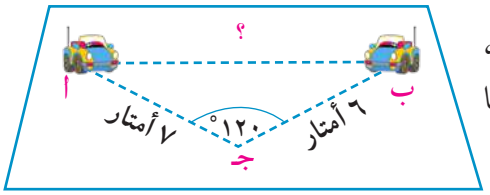
$= (١٦)^{٢} + (٢٠)^{٢} - ٢ \times ١٦ \times ٢٠$ حتا ٤٠°

$\simeq ١٢,٨٧$ متر

المسافة بين الجناح الأيمن والجناح الأيسر هو حوالى ١٢,٨٧ مترًا.

حاول أن تحل

(١٣) **العاب** فى ساحة السيارات المتصادمة فى مدينة الملاهى، اصطدمت السيارتان أ ، ب كما هو مبين بالشكل المقابل ، ما المسافة بين السيارتين قبل تصادمهما؟

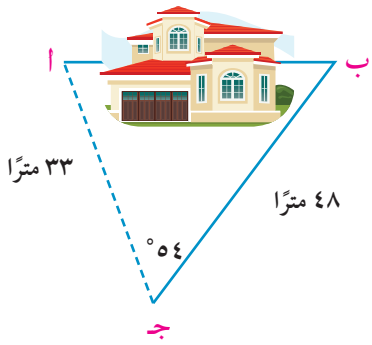


مثال

قياس المسافة بطريقة غير مباشرة

Measuring the distance indirectly

(١١) فى الشكل المقابل أراد شادى أن يقيس المسافة بين النقطتين أ ، ب فى جهتين مُختلفتين من مَبنى ، وذلك من الموقع جـ الذي يَبعد عن أ مسافة ٣٣ مترًا، وعن ب مسافة ٤٨ مترًا، كما هو موضَّح بالشكل المقابل ، إذا كان ق(∠ جـ) = ٥٤°، فأوجد المسافة أ ب (مقربًا لأقرب رقمين عشريين).



الحل

في المثلث أ ب جـ المسافة أ ب = جـَ

$جـَ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - ٢ أ ب$ حتا جـ

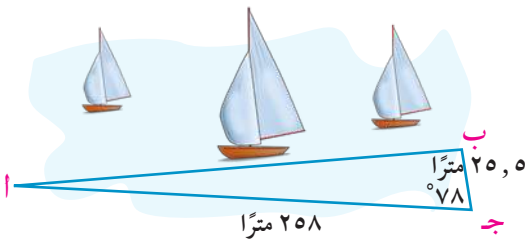
$= (٤٨)^{٢} + (٣٣)^{٢} - ٢ \times ٤٨ \times ٣٣$ حتا ٥٤°

$\simeq ١٥٣٠,٨٩٦٣$

جـَ $\simeq ٣٩,١٢$ مترًا

حاول أن تحل

(١٤) **حسابات مساحات الأراضى** ارادت سناء قياس المسافة من النقطة أ إلى النقطة ب، اللذان يقعان فى جهتين مختلفين من بحيرة ، فوقفت فى الموقع جـ ، الذى يَبعد عن النقطة أ مسافة ٢٥٨ مترًا ، وعن النقطة ب مسافة ٢٥,٥ مترًا ، وقاست ∠ جـ فوجدتها ٧٨° ، أوجد طول $\overline{أ ب}$ (مقربًا لأقرب رقمين عشريين)



تمـــاريـن الدرس الثانى

(١) أكمل ما يأتى:

أ) فى أى مثلث س ص ع يكون :

س^{٢} = ص^{٢} + ع^{٢} ، حتا س = $\frac{\text{ص}^{٢}+\text{ع}^{٢}}{\text{.....}}$

ب) مثلث أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات، فإن قياس أكبر زواياه هو °

ج) مثلث أطوال أضلاعه ٧,٥سم ، ٧,٥سم ، ٤,٢سم، فإن قياس أصغر زواياه هو

د) مثلث أ ب جـ فيه أ = ١٠سم ، ب = ٦سم ، ق(∠جـ) = ٦٠ ° فإن جـ = ...

هـ) فى المثلث ل م ن يكون م^{٢} + ن^{٢} - ل^{٢} = ...

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى :

(١) ١٥٠ ° (٢) ١٢٠ ° (٣) ٦٠ ° (٤) ٣٠ °

ب) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{\text{ل}^{٢}+\text{م}^{٢}-\text{ن}^{٢}}{٢\,\text{ل م}}$ مساويًا :

(١) حا ل (٢) حتا م (٣) حتا ن (٤) حا ن

ج) فى المثلث س ص ع يكون ص^{٢} + ع^{٢} - س^{٢} = ٢ص ع...

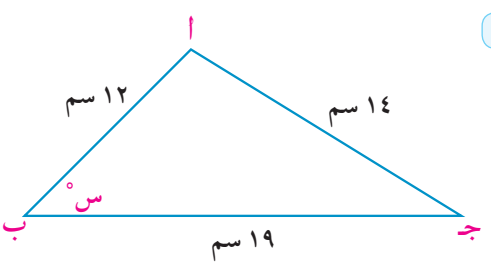
(١) حتا س (٢) حا ع (٣) حتا ع (٤) حا س

د) فى المثلث أ ب جـ ، أ : ب : جـ = ٣ : ٢ : ٢ فإن حتا أ تساوى :

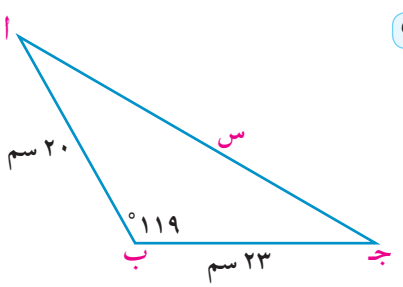
(١) $\frac{١}{٢}$ (٢) $-\frac{١}{٨}$ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) $\frac{٣}{٤}$

(٣) استخدم قانون جيب التمام لإيجاد قيمة س لأقرب جزء من عشرة

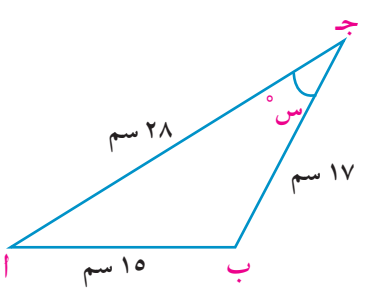
أ)



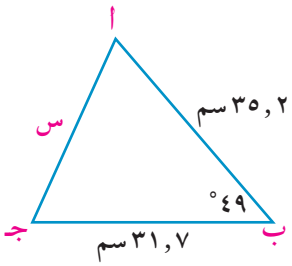
ب)



ج)



د)



(٤) فى المثلث أ ب جـ إذا كان:

أ) أَ = ٥، بَ = ٧ ، جَ = ٨ ، فأثبت أن ق(∠ب) = ٦٠°

ب) أَ = ٣، بَ = ٥ ، جَ = ٧ ، فأثبت أن ق(∠جـ) = ١٢٠°

جـ) أَ = ١٣، بَ = ٧ ، جَ = ١٣ ، فأوجد ق(∠جـ)

د) أَ = ١٣، بَ = ٨ ، جَ = ٧ ، فأوجد ق(∠أ)

هـ) أَ = ١٠، بَ = ١٧ ، جَ = ٢١ ، فأوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث .

و) أَ = ٥، بَ = ٦ ، جَ = ٧ ، فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث.

ز) أَ = ١٧سم، بَ = ١١سم ، ق(∠جـ) = ٤٢° ، فأوجد جَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

ح) بَ = ١٦سم، جَ = ١٤سم ، ق(∠أ) = ٧٢° ، فأوجد أ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

(٥) مثلث أ ب جـ فيه أَ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، جَ = $\sqrt{١٩}$ سم أوجد :

أ) ق(∠جـ) ب) مساحة المثلث أ ب جـ

(٦) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٩سم ، بَ = ١٥سم ، جَ = ٢١ سم ، أوجد قياس أكبر زاوية فى هذا المثلث ، وأثبت أنها تُحقق العلاقة حتا جـ - $\frac{٥\sqrt{٣}}{١٤}$ حا جـ + ٨ = ٠

(٧) ضلعان من أضلاع مثلث طولاهما ($\sqrt{١٠}$ + ٢) ، ($\sqrt{١٠}$ - ٢) والزاوية المحصورة بينهما ٦٠° أوجد طول الضلع الثالث .

(٨) أ ب جـ مثلث فيه ح - أَ = ٨سم ، ح - بَ = ٦سم ، ح - جَ = ٤سم فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث، حيث ٢ ح = أَ + بَ + جَ

(٩) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ح - أَ = ٢٦سم ، بَ = ٢٨سم ، ح + أَ = ٩٨ سم، حيث ٢ ح هو محيط المثلث، فأوجد أطوال أضلاع المثلث ، ثم قياس أصغر زاوية فى هذا المثلث.

(١٠) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٣سم ، أجـ = ٨سم ، ب جـ = ٧سم ، جـ ء = ٥سم ، ب ء = ٨سم ، أثبت أن الشكل رباعى دائرى.

(١١) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ١٥سم ، ب جـ = ٢٠سم ، جـ ء = ١٦سم، $\overline{أجـ}$ = ٢٥ سم ،
ق(∠أجـ ء) = ٣٦° ٥٢′ ، أوجد طول $\overline{أجـ}$ لأقرب سنتيمتر ، ثم أوجد مساحة سطح الشكل الرباعى أ ب جـ ء.

(١٢) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ١٠سم ، طول القطر $\overline{ب ء}$ يساوى ١٤سم ، أوجد طول القطر $\overline{أجـ}$.

(١٣) إذا كانت النسبة بين جيوب زوايا مثلث هى ٢ : ٣ : ٤ أوجد النسبة بين جيوب تمام زوايا هذا المثلث .

(١٤) فى المثلث س ص ع إذا كان صَ^{٢} = (عَ - سَ)^{٢} + عَ سَ أثبت أن ق(∠ب) = ٦٠°

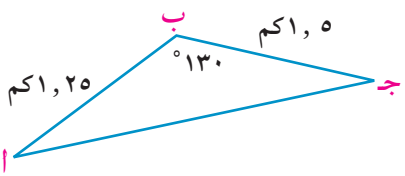
(١٥) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه ب جـ = ٧٨ سم ، جـ ء = ٩٦سم ، ق(∠ ب جـ ء) = ٩٧° ٧٨′ ،
ق(∠ أ ب ء) = ٧٢° ٣٥′ ، ق(∠ أ ء ب) = ٤٣° ١٨′ أوجد طول $\overline{أ ب}$.

(١٦) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٦سم ، أ جـ = ٢٤ سم ، ق(∠ أ) = ٨٠° ، أوجد طول $\overline{ب جـ}$ ، وإذا كان $\overline{أ ء}$ ينصف ∠ أ من الداخل ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى ء ، أوجد طول $\overline{أ ء}$

(١٧) **الربط بالرياضة :** ميدان للسباق على شكل مثلث أطوال اضلاعه ١,٢كم، ٢كم، ١,٨كم، أوجد قياس كل زاوية من زواياه.

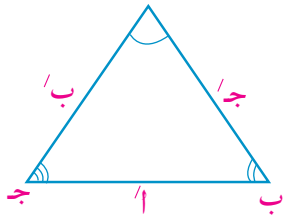
(١٨) **مساحات الأراضى :** قطعة أرض على شكل مثلث أطوال أضلاعه ٣٠٠م ، ٢١٠م ، ١٤٠ م ، استخدم قانون جيب التمام لإيجاد مساحة قطعة الأرض مُقربًا لأقرب مترٍ مربعٍ.

(١٩) **الربط بالرياضة :** يركب كريم دراجته ليقطع المسافة من النقطة أ إلى النقطة ب ثم إلى النقطة جـ بسرعة ٢٨ كم/ساعة، ثم يعود من النقطة جـ إلى النقطة أ مباشرة بسرعة ٣٥كم/ساعة، كم دقيقة تستغرقها رحلة كريم ذهابًا وإيابًا ، قرب لأقرب جزء من عشرة.



(٢٠) **الكتابة فى الرياضيات:** قارن بين الحالات التى تستطيع فيها استخدام قانون الجيب لحلِّ مثلث بتلك التى تستطيع فيها استحدام قانون جيب التمام.

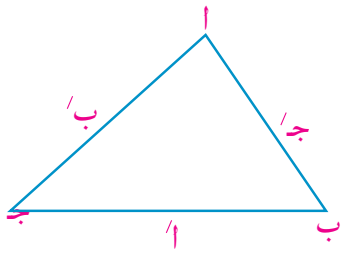
مُلخَّصُ الوَحْدَةِ



١ للمثلث ستة عناصر هى ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا .

٢ حل المثلث يعنى إيجاد عناصره المجهولة بدلالة عناصره المعلومة، وقد استخدمنا فى هذه الوحدة قانونى الجيب وجيب التمام مع الآلة الحاسبة العلمية لحل المثلث وحل تطبيقات هندسية وحياتية.

٣ قانون (قاعدة) الجيب: في أى مثلث ، تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها، أىْ أنَّه فى أى مثلث أب جـ يكون : $\frac{أ}{\text{حا ا}} = \frac{ب}{\text{حا ب}} = \frac{جـ}{\text{حا جـ}}$



➢ وقد أمكن استخدام هذا القانون فى حل المثلث متى عُلِمَ قياسا زاويتين وطول ضلع فيه:

٤ فى أىِّ مثلث أ ب جـ يكون:

$\frac{أ}{\text{حا ا}} = \frac{ب}{\text{حا ب}} = \frac{جـ}{\text{حا جـ}} = ٢ \text{ نق}$

➢ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

٥ قانون (قاعدة) جيب التمام:

➢ يَنص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه: فى أى مثلث أ ب جـ يكون

$أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ب جـ \text{ حتا ا}$ ومنه $\text{حتا ا} = \frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$

$ب^{٢} = جـ^{٢} + أ^{٢} - ٢ب أ \text{ حتا ب}$ ومنه $\text{حتا ب} = \frac{جـ^{٢} + أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ جـ أ}$

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - ٢أ ب \text{ حتا جـ}$ ومنه $\text{حتا جـ} = \frac{أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}}{٢ أ ب}$

٥ استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلث:

➢ يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى حل المثلث إذا علم :

➢ طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

➢ أطوال أضلاعه الثلاثة.

تـــمارين عامة

(١) أكمل مايأتى:

أ في أى مثلث ، تتناسب أطوال أضلاعه مع

ب يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى إيجاد قياسات زوايا المثلث إذا علمت أو

ج أكبر الأضلاع طولاً فى المثلث يقابل

د يمكن استخدام قانون الجيب فى إيجاد طول أى ضلع فى المثلث إذا عُلِمَ منه

هـ مثلث أ ب جـ معلوم به أَ ، بَ ، وهـ(∠أ) فإنه يمكن استخدام القاعدة لإيجاد وهـ(∠ب).

و مثلث س ص ع معلوم به عَ ، صَ ، وهـ(∠س) فإنه يمكن استخدام القاعدة لإيجاد سَ.

ز مثلث ل م ن معلوم به لَ ، مَ ، نَ ، فإنه يمكن استخدام قاعدة لإيجاد وهـ(∠ل)

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ في المثلث س ص ع ، إذا كان سَ = ١٥سم، صَ = ٢٥ سم، عَ = ٣٥ سم فإن قياس أكبر زاوية في المثلث تساوى :

(١) ١٥٠° (٢) ١٢٠° (٣) ٤٠° (٤) ٩٠°

ب فى المثلث أ ب جـ إذا كان أَ = ٤سم ، بَ = ٧سم ، وهـ(∠جـ) = ١٢٠° ، فإن مساحة سطح المثلث أ ب جـ تساوى:

(١) ١٤سم٢ (٢) ٧√٣ سم٢ (٣) ٢٨سم٢ (٤) ٧√٢ سم٢

ج س ص ع مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ١٠√٣ سم ، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى :

(١) ٥سم (٢) ١٠سم (٣) ١٥سم (٤) ٢٠سم

د إذا كان طول نصف قُطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع يُساوى ٥سم ، وهـ(∠أ) = ٣٠° ، فإن أَ يساوى :

(١) ١٠ سم (٢) ٥سم (٣) ١٠سم (٤) ٢٠سم

هـ فى المثلث أ ب جـ ، إذا كان أَ = ٥سم ، بَ = ٧سم ، جَ = ٨سم، فإن وهـ(∠ب) تساوى :

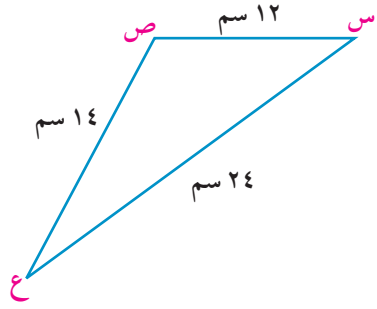
(١) ٣٠° (٢) ٦٠° (٣) ٤٥° (٤) ١٢٠°

و فى المثلث أ ب جـ ، إذا كان أَ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، جَ = ٧سم، فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث تساوى :

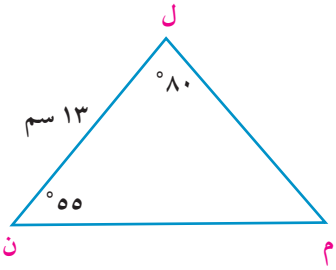
(١) ٣٠° (٢) ٦٠° (٣) ٤٥° (٤) ١٢٠°

(٣) أوجد القياسات غير المعلومة فى كل مثلث ممايأتى:

أ



ب



(٤) أ ب جـ مثلث ، أوجد القياسات غير المعلومة فى كل مثلث مقربًا لأقرب جزء من مائة :

أ) ق(∠أ) = ٦٠° ، بَ = ١٠سم ، جَ = ٩سم.

ب) ق(∠ب) = ٢٥° ، ق(∠جـ) = ٥٨° ، أَ = ٣سم.

(٥) سؤال مفتوح: ارسم مثلثًا مختلف الأضلاع، حدِّد ثلاثة من قياسات عناصره متضمنة طول أحد الأضلاع، ثم أوجد قياسات العناصر الثلاثة الأخرى.

(٦) أ) فى المثلث أ ب جـ ، أَ = ٨سم ، بَ = ١٥سم، جَ = ١٧سم أوجد ق(∠جـ)

ب) فى المثلث أ ب جـ إذا كان أَ = ٨سم ، بَ = ١٥سم ، جَ = ١٨سم ، هل ∠جـ حادة أم منفرجة ؟ فسِّر إجابتك.

(٧) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٩,٧٧سم ، قطراه $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بء}$ يصنعان مع ضلعه $\overline{أب}$ زاويتين قياسهما ٣٦٫٢٢°، ٥٨٫٤٤° ، أوجد طولى القطرين.

(٨) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٢٧سم ، ب جـ = ١٢سم ، جـ ء = ٨سم ، ء أ = ١٢سم ، أجـ = ١٨ سم ، أثبت أن $\overline{أجـ}$ ينصف ∠ ب أ ء.

(٩) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ أ) = ٥٢° ٦٧′ ، ق(∠ب) = ٧٧° ٦′ ، ومحيط المثلث يساوى ٨٠,٤سم ، أوجد أطوال أضلاعه .

(١٠) أ ب جـ مثلث فيه جَ = ٧,٦سم ، ، ق(∠أ) = ٨٠° ، ق(∠ب) = ٤٧° ، أوجد محيط هذا المثلث ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(١١) أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، أجـ = ١٦سم، ب ء = ٢٠سم ق(∠ أ م ب) = ٥٤° احسب طول $\overline{أء}$ لأقرب سنتيمتر.

(١٢) أ ب جـ مثلث فيه ب جـ = ٢٠سم ، ق(∠ب) = ٢٩° ، ق(∠جـ) = ٧٣° ، ء منتصف $\overline{بجـ}$ ، أوجد طول كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

(١٣) أ ب جـ مثلث فيه أ جـ = ٤,٧سم، ق(∠ب) = ٣٤° ، ق(∠جـ) = ٦٦° ، أوجد طول $\overline{بجـ}$ ، ثم أوجد محيط الدائرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب جـ .

(١٤) أ ب جـ مثلث فيه حتا أ = $\frac{٢}{٥}$ ، بَ = ٢,٥سم ، جَ = ٢سم، أثبت أن المثلث أ ب جـ متساوى الساقين.

(١٥) أ ب جـ مثلث فيه أَ : بَ : جَ = ٤ : ٥ : ٦ أوجد حتا أ.

(١٦) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه بَ = ١١سم ، ق(∠أ) = ٦٧° ، ق(∠ب) = ٤٦° مقربًا الأطوال لأقرب سنتيمتر.

(١٧) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ١٣سم، جَ = ١٥سم ، ق(∠أ) = ٥٣° ٨′

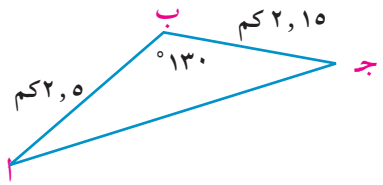
(١٨) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع محيطة ٣٠ سم والنسبة بين طولي ضلعين متجاورين ٣ : ٢ ، فإذا كان ق(∠ أ ء حـ) = ٦٠° فأوجد طول $\overline{أجـ}$.

(١٩) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$ ، أ ء = ٢٦,٣سم، جـ ء= ٣٨,٤سم، أجـ = ٥١,٧سم، وق(∠ بأ ء) =١٠٣°١٥ أوجد طول $\overline{بجـ}$.

(٢٠) **الربط بالرياضة :** جرى أحمد مسافة ٨ كم فى اتجاه معين ، ثم انعطف بزاوية قياسها ٨٠° ، وجرى مسافة ٩ كم ، ما المسافة بين النقطة التى بدأ منها أحمد الجرى والنقطة التى وصل إليها؟

(٢١) **الربط بالرياضة:** فى إحدى مباريات كرة القدم كان لاعب خط الوسط على بعد ١٥مترًا من لاعب الجناح الأيمن، ودار لاعب خط الوسط بزاوية قياسها ٤٥° ، رأى الجناح الأيسر على بعد ١٧ مترًا منه ، ما المسافة بين لاعبى الجناحين؟

(٢٢) **المواصلات :** يركب أحمد دراجته البخارية ليقطع المسافة من النقطة أ إلى النقطة ب ثم إلى النقطة جـ بسرعة ٥٠ كم/ ساعة ثم يعود من النقطة جـ إلى النقطة أ مباشرة بسرعة ٦٠كم/ساعة ، كم دقيقة تستغرقها الرحلة ذهابًا و إيابًا مقربًا لأقرب جزء من عشرة من الدقيقة؟



اختبار تراكمى

أسئلة الاختيار من مُتَعدِّد :

(١) بدون استخدام الآلة الحاسبة تكون قيمة حتا ١٢٠°

أ $-\frac{١}{٢}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(٢) العلاقة التى تربط بين ظا هـ، قا هـ تُعطى على الصورة :

أ ظا^{٢}هـ - ١ = قا^{٢}هـ ب قا^{٢}هـ - ١ = ظا^{٢}هـ ج ظا^{٢}هـ - قا^{٢}هـ = ١ د ظا^{٢}هـ + ١ = قا^{٢}هـ

(٣) نصف قُطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٦٠° ، أَ $٢\sqrt{٣}$ سم يكون طوله:

أ ٢سم ب $\sqrt{٣}$ سم ج $٢\sqrt{٣}$ د $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم

(٤) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار : $\frac{م^{٢} + ن^{٢} - ل^{٢}}{٢ م ن}$ مساويًا

أ حتا ل ب حتا م ج حا ل د حا ن

(٥) فى المثلث أ ب جـ يكون بَ مساويًا

أ $\frac{جـ حا ب}{حا جـ}$ ب $\frac{جـ حا جـ}{حا ب}$ ج $\frac{جـ حا ب}{أ}$ د $\frac{جـ حا جـ}{أ}$

(٦) فى المثلث أب جـ ، إذا كان أَ = ١٢، بَ =٢٨، جـَ = ٢٠ فإن ق(∠ب) تساوى :

أ ٣٠° ب ٦٠° ج ١٢٠° د ١٥٠°

أسئلة ذات إجابات قصيرة :

(٧) فى المثلث س ص ع إذا كان سَ = ١٠سم ، ق(∠س) = ٣٠° ، ق(∠ص) = ٤٥° ، فأوجد صَ مقربًا لأقرب رقم عشرى واحد.

(٨) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٤سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = ٦سم ، أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث، ثم أوجد مساحته.

الأسئلة ذات الإجابات الطويلة :

(٩) س ص ع مثلث فيه : ق(∠س) = $\frac{٢}{٣}$ ق(∠ص) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ع)، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ١٠سم، أوجد مساحة سطح المثلث س ص ع .

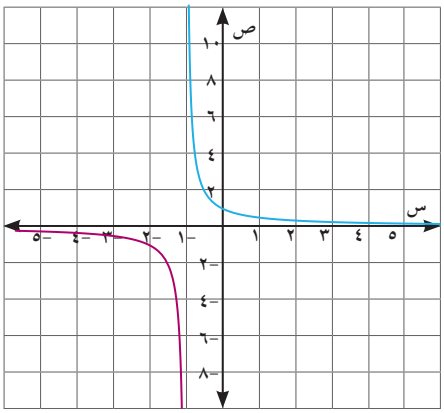
(١٠) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ، أَ = ١٢سم ، ق(∠ب) = ٦٦° ٢٥′ ، جـَ = ٥سم

(١١) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٨سم ، أ ء = ١٠سم ، ق(∠أ) = ٨٢° ٤٩′ ، ب جـ = ١٢ سم ، ق(∠ جـ ب ء) = ٦٨° ٥٤′ ، أوجد طول $\overline{جـ ء}$.

اختبارات عامة

الاختبار الأول — الجبر

اجب عن الأسئلة الآتية:



السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) فى الشكل المقابل: أكمل

أ المجال هو

ب المدى هو

(٢) الدالة د حيث د(س) = ٤ - س^{٢}

تكون تزايدية فى

تناقصية فى

(٣) منحنى الدالة د حيث د(س) = |س-٢| متماثل حول المستقيم:

(٤) إذا كان د(س) = ٥^{س} فإن د(-٢) = ...

السؤال الثانى: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه.

(١) مدى الدالة د حيث د(س) = { ٠ عندما س ⩾ ٠ ؛ -١ عندما س < ٠ } هو

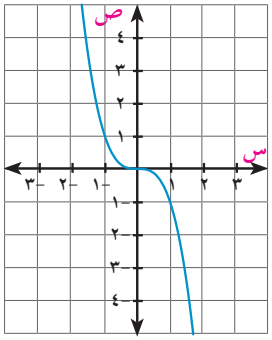
أ {٠} ب {-١} ج ع د {٠، -١}

(٢) الدالة د حيث د(س) = $\frac{|٢س|}{س}$ تكافئ الدالة د(س) =

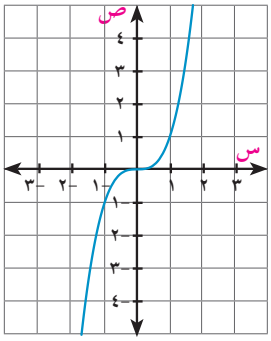
أ { ٢ عندما س < ٠ ؛ -٢ عندما س > ٠ } ب ٢ ج -٢ د { ٢ عندما س ⩽ ٠ ؛ -٢ عندما س > ٠ }

(٣) إذا كان د : ع ⟵ ع حيث د(س) = س^{٣} فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو:

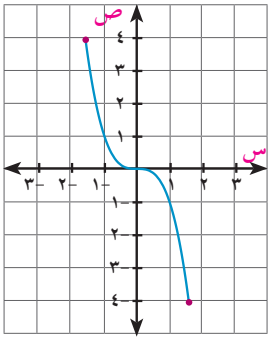
أ



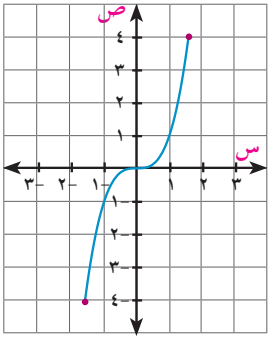
ب



ج



د



٤) إذا كان : ٥ س - ٣ = ٤ ٣-س فإن س = ...

أ) $\frac{٥}{٤}$ ب) ٣ ج) $\frac{٤}{٥}$ د) صفر

السؤال الثالث :

١) مثل بيانيًا د(س) = س٢ - ١ ثم استنتج من الرسم محور التماثل ومدى الدالة

٢) أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة لو س = لو٣ + لو ١٠

السؤال الرابع:

١) أوجد فى ع مجموعة حل المتباينة |س - ٣| ≤ ٥

٢) اختصر لأبسط صورة = $\frac{٤ \times ٢^{ن+١} \times ٢^{ن-١}}{٨^{ن+٢}}$

السؤال الخامس:

١) ارسم منحنى الدالة دحيث د(س) = |س - ٣| واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

٢) حل المعادلة ٩س - ٣ × ٣س = صفر

الاختبار الثانى — الجبر

اجب عن الأسئلة الآتية:

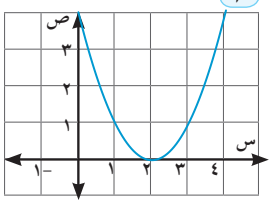
السؤال الأول: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٣) مدى الدالة د حيث د(س) = |س| هو

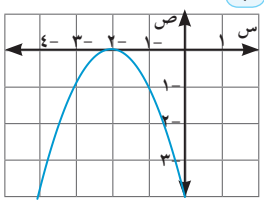
أ)]-∞ ، ٠[ب)]٠ ، ∞[ج) [٠ ، ∞ - [د)]٠ ، ∞-[

٤) إذا كان دالة حيث د(س) = س٢ + ٢ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو

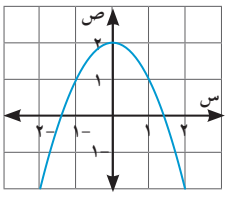
أ)



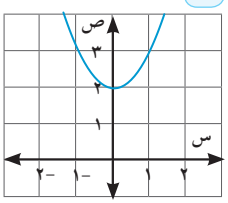
ب)



ج)



د)



٥) مجموعة حل المعادلة لو٣ |س| = ١ هو

أ) {٣} ب) {-٣} ج) {٣، -٣} د) {١، -١}

٦ نقطة تماثل الدالة د حيث د(س) = س^{٣} - ١ هى

أ (١ ، ٠)　　ب (٠ ، -١)　　جـ (١ ، ٠)　　د (-١ ، ٠)

السؤال الثانى: أكمل مايأتى:

١ مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س + ١}$ هو

٢ معادلة محور تماثل الدالة د حيث د(س) = س^{٢} هو المستقيم.....

٣ الدالة د حيث د(س) = أ^{س} تكون تزايدية على مجالها ع عندما.....

٤ مجموعة حل المعادلة | س -٣ | = صفر هى

السؤال الثالث:

١ أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة الآتية: ٤^{س} + ٢$^{س+١}$ = ٨

٢ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ - ١

ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

السؤال الرابع:

١ أوجد فى ع مجموعة حل المتباينة |س| +١ > ٢

٢ بدون استخدام الحاسبة أثبت ان: لو$_{٦}$ ٨ + لو$_{٦}$ ٢٧ = لو$_{٣}$ ٢٧

السؤال الخامس:

١ إذا كانت د(س) = |س -٣| + |س +٢| فاثبت أن د(٢) = د(-١)

٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} فى رسم كل من الداول الآتية :

أ د$_{١}$(س) = س^{٢} - ٣　　ب د$_{٢}$(س) = (س +١)^{٢}

الاختبار الثالث — الجبر

اجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اكمل مايأتى:

(١) نقطة التماثل لمنحنى الدالة د حيث د(س) = (س -١)^{٣} هى

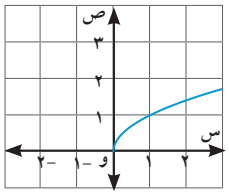
(٢) مجموعة حل المعادلة ٣س$^{١+س}$ +٣ = ٣٦ هى

(٣) مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{س+٣}{س^{٢}-٩}$ هو:

(٤) نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك حيث د(س) = س حا س هو

السؤال الثانى: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) مجال الدالة فى الشكل المقابل هو



أ [٠، ∞[ب]٠، ∞[

جـ [٠، ١] د]٠، ٢[

(٢) مجموعة حل المتباينة |س| -١ < صفر هو

أ ع - [-١، ١] ب]-١، ١[جـ ع -]-١ ، ١[د [-١، ١]

(٣) إذا كان ٤ = لو$_{٢}$ س فإن الصورة الاسية المكافئة هى ..

أ س^{٢} = ٤ ب س^{٤} = ٢ جـ س = ٢^{٤} د س = ٨

(٤) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} +١ هى س^{٢} + ١

أ س = صفر ب س = ١ جـ ص = ١ د ص = صفر

السؤال الثالث

(١) استخدم منحنى د الدالة حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدوال الآتية :

أ د$_{١}$ (س) = |س| - ١ ب د$_{٢}$ (س) = | س +١|

(٢) اختصر لأبسط صورة لو$_{٦}$ ٥٤ - لو$_{٦}$ ٩

السؤال الرابع:

(١) أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة الآتية لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س +١) =١

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل الدالة ر حيث د(ر) = د(س) + ٢ ومن الرسم أوجد مدى ر وأثبت أنها زوجية

السؤال الخامس :

(١) أوجد باستخدام الحاسبة

أ قيمة س التى تحقق ٣^{س} = ٢٥ مقربًا الناتج لرقمين عشريين

ب متجه المقدار $\frac{١٥^{٣}}{٣٠,٥}$ مقربًا الناتج لأقرب أربعة أرقام عشرية

(٢) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س < ٠ \\ |س| & \text{عندما } س \geq ٠ \end{cases}$

ومن الرسم أوجد: المدى وابحث الاطراد وعين نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

الاختبار الرابع — الجبر

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه:

(١) لو ٢ + لو٥ =

أ ١ ب لو٧ ج لو ٢,٥ د ١٠

(٢) أى الدوال الآتية تمثل دالة زسية تزايدية على مجالها ع:

أ ص = ٣ (١,٠٥)^{س} ب ص = ٣ $(\frac{١}{١,٠٥})^{س}$ ج ص = ٣ + (٠,٥)^{س} د ص = (٠,٠٥)^{س}

(٣) إذا كان |أ س| = |٢ س| فإن قيمة أ = ...

أ -٢ ب ٢ ج ± ٢ د صفر

(٤) منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س^{-٣}}$ هو منحنى الدالة ر(س) = $\frac{١}{س}$ بإزاحة قدرها وحدات فى الاتجاه الموجب لمحور السينات

أ -٣ ب ٣ ج $\frac{١}{٣}$ د $\frac{١}{٣}$

السؤال الثانى: اكمل مايأتى:

(١) مدى الدالة د حيث د(س) = |س| هو

(٢) إذا كان ٥$^{س-٢}$ = ١ فإن س =

(٣) إذا كان د(س) = ٢^{س} فإن د (-١) = ...

(٤) محور تماثل الدالة د حيث د(س) = س^{٢} - ١ هو

السؤال الثالث:

(١) أوجد جملة مبلغ ٨٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٥٪ لمدة سبع سنوات.

(٢) ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} -١ ومن الرسم أوجد نقطة تماثل الدالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

السؤال الرابع:

(١) ارسم منحنى الدالتين د، ر حيث د(س) = س +١، ر(س) = ١ - س ومن الرسم أوجد مساحة المثلث المحدد بالمستقيمين المتقاطعين ومحور السينات .

(٢) اختصر لأبسط صورة = $\frac{١ - \text{لو}_{٢}}{\text{لو}_{١٢٥}}$

السؤال الخامس:

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\frac{١}{\text{لو}_{٣٠}^{٢}} + \frac{١}{\text{لو}_{٣٠}^{٣}} + \frac{١}{\text{لو}_{٣٠}^{٥}}$

(٢) ارسم منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س + ١ & -١ \leqslant س < ٢ \\ ٥ - س & ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$$

ومن الرسم استنتج مدى هذه الدالة وابحث اطرادها وحدد نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

الاختبار الخامس — الجبر

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

(١) عدد محاور تماثل الدالة د حيث د(س) = ٥ هو

أ صفر　ب واحد　ج ٢　د عدد لانهائى

(٢) إذا كان د(س) =٢ فإن د(٢ س) = ...

أ ٢　ب ٤　ج صفر　د ١

(٣) الدالة د حيث د(س) =أ^{س} تكون تناقصية مع مجالها ع عندما

أ أ =١　ب أ < ١　ج ٠ < أ < ١　د -٤

(٤) إذا كانت د(س) دالة زوجية ، د(٢) = ٤ فإن د(-٢) = ...

أ -٣　ب ٢　ج ٤　د ٤

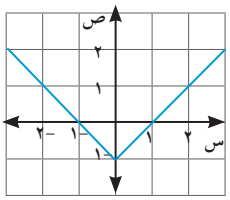
السؤال الثانى: اكمل مايأتى:

(١) الدالتان د، ر حيث د(س) = ٢^{س}، ر(س) = لو$_{٢}$ س متماثلتان بالنسبة للمستقيم

(٢) إذا كان $\sqrt{٢}$ س^{٢} = ٩ فإن س = ...

(٣) مجموعة حل المعادلة |س-٢| =١ هى

(٤) فى الشكل المقابل مجموعة حل المعادلة هو



السؤال الثالث:

(١) عين مجال كل من الدوال الآتية:

أ د$_{١}$(س) = $\sqrt{٨ - س - ٢}$　ب د$_{٢}$(س) =لو$_{٣}$ (س -٢)

(٢) إذا كان عدد السكان (ص) بالمليون نسمة فى إحدى المحافظات يعين من العلاقة: ص = ١١,٧ (١,٠٢)ن حيث ن عدد السنوات بدءًا من عام ٢٠١٥م

أ أوجد لأقرب مليون نسمة عدد سكان هذه المحافظة فى عام ٢٠١٠م

ب متى يتضاعف عدد السكان فى هذه المحافظة بدأ من عام ٢٠١٥م؟

السؤال الرابع:

① إذا كانت العلاقة بين شدة التيار (ت) امبير والزمن (ن) ثانية تعطى بالصيغة ت = $(\frac{1}{2})^{ن}$ احسب الزمن إذا كان شدة التيار $\frac{1}{32}$ أمبير

② استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل الدالة ر حيث ر(س) = |س -١|-٢ ثم أوجد مدى الدالة ومعادلة محور التماثل .

السؤال الخامس:

① إذا كان الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ فأوجد مجال الدالة د و إحداثيى نقطة التماثل لمنحنى هذه الدالة . ثم أوجد مجموعةحل المعادلةد($\frac{1}{س}$) = ٤

② ارسم منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & \text{لكل } -٥ \leq س < ٢ \\ ٦ - س & \text{لكل } ٢ \leq س \leq ٨ \end{cases}$$

ومن الرسم عين مدى الدالة وابحث اطرادها.

الاختبار السادس — تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

① نهـــا$_{س \to ١}$ (س^{٢} + ٣) = ...

② فى أى مثلث أ ب جـ يكون $\frac{أ'}{حا أ}$ = ... حيث و طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس أ ب جـ

③ إذا كان نهـــا$_{س \to ٢}$ $\frac{أ}{س+١}$ = ٤ فإن أ = ...

④ فى أى مثلث س ص ع أطوال أضلاع سَ، صَ، عَ يكون: حتا س = $\frac{ص^{-٢} + ع^{-٢} -}{.....}$

السؤال الثانى:

اختر من بين القوسين الاجابة الصحيحة:

① نهـــا$_{س \to -١}$ (٣س^{٢}) = ... (٣ أو ٦ أو -٣ أو ٩)

② △أ ب جـ النسبة بين أطوال أضلاعهاَ: بَ: جَ = ٢ : ٣ : ٤ فإن و(∠ أ) ≃ (٨٢° أو ٤٩° أو ٤٠° أو ٢٩°)

③ نهـــا$_{س \to ١}$ $\frac{س^{٢}-١}{س-١}$ = ... (صفر أو ١ أو ٢ أو ٣)

④ فى△ أب جـ : إذا كان و(∠ أ) = ٣٠° ، أَ = ٦سم فإن $\frac{ب'}{حاب}$ = ... (٣ ، ٦ ، $\frac{١}{٥}$ ، ١٢)

السؤال الثالث:

(١) أوجد قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س - ١}$

(٢) أ ب جـ مثلث فيه أ/ = ٨ سم ، وق (∠ أ) = ٦٥° ، وق (∠ ب) = ٣٦° ، أوجد جـ/ لأقرب سم.

السؤال الرابع:

(١) أوجد قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$

(٢) أوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث أب جـ إذا كان أ/ = ٢٥سم ، ب/ = ٢٠سم، جـ/ = ٢٨سم

السؤال الخامس:

(١) أوجد قيمة $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} (س + حا٣س)$

(٢) Δ أ ب جـ فيه: $\frac{١}{٢}$ حا أ = $\frac{١}{٣}$ حا ب = $\frac{١}{٤}$ حا جـ أوجد قياس اكبر زواياه

الاختبار السابع — تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول:

(١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{حا ٢ س}{٢ س}$ = ..

(٢) طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ١٠سم= سم

(٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{س + ٢}{س - ٣}$ = ...

(٤) قياس اكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال اضلاعه ٧ سم ، ٨ سم، ٩ سم يساوى ...

السؤال الثانى: اختر الاجابة الصحيحة من بين القوسين:

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ + س}{س}$ = ... (٢ أ، صفر أ، ٣ أ، ١)

(٢) فى Δ أ ب جـ إذا كان ٢ حا أ = ٣ حا ب = ٤ حا جـ فإن أ/ : ب/ : جـ/ يساوى ...

(٢ : ٣ : ٤ أ، ٤ : ٣ : ٢ أ، ٣ : ٤ : ٦ أ، ٦ : ٤ : ٣)

(٣) $\lim_{س \to ٠}$ (حتا ٣ س + ٥) = ... (٣ أ، ٥ أ، ٨ أ، ٦)

(٤) فى Δ أ ب جـ إذا كان أ/ = ب/ = ٨سم ، محيط Δ أ ب جـ = ٢٦ سم فإن: وق (∠ جـ) ≃

(٣٥,٣° أ، ٥٢,٣° أ، ٧٧,٤° أ، ١٠٨°)

السؤال الثالث:

(١) أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س^{٤} + ٣س^{٢} - ٦}{٢ س + س^{٤}}$

(٢) أوجد محيط $\triangle$ أ ب جـ الذى فيه: أ/ = ٨سم ، ب/ = ٦سم ، ق(∠جـ) = ٤٨°

السؤال الرابع:

(١) أوجد قيمة $\lim_{س \to \pi} (٢ \text{ حتا } س + ٣)$

(٢) $\triangle$ أ ب جـ فيه ق(∠أ) = ٣٦° ، ق(∠جـ) = ٤٥° ، ب/ = ٩سم أوجد جـ/ ثم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسة.

السؤال الخامس:

(١) أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$

(٢) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ق(∠ب) ، ق(∠جـ) = ٨٠° ، جـ/ = ١٥سم

الاختبار الثامن — تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{س - ٣}$ = ...

(٢) فى أى مثلث أ ب جـ يكون: $\frac{أ/}{.....} = \frac{.....}{حا ب} = \frac{أ/ + ب/}{.....}$

(٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢س + حا س)$ = ...

(٤) فى أى مثلث أ ب جـ يكون ب/^{٢} = جـ/^{٢} + أ/^{٢}

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين:

(١) فى $\triangle$ أ ب جـ إذا كان أ/ = ٧سم فإن ب = ...

($\frac{٧حاأ}{حاب}$ أ، $\frac{٧حاب}{حاأ}$ أ، $\frac{حاأ}{٧حاب}$ أ، $\frac{حاجـ}{٧حاب}$)

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢} + ١}{س^{٢} - ٢}$ = ...

(-٥ أو $\frac{٥}{٢-}$ أو ٤ أو -٩)

(٣) فى أى مثلث س ص ع يكون المقدار $\frac{س^{٢}+ص^{٢}-ع^{٢}}{٢ س ص}$ مساويًا:

(حتا س أ، حا ص أ، حتا ع أ، حا ع)

(٤) نهـــا $_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{٥}-١}{س-١}$ = ... (٥ أو ١ أو ٤ أو ٢٠)

السؤال الثالث:

(١) أوجد نهـــا $_{س \leftarrow ٣}$ $\frac{\sqrt{س+١}-٢}{س-٣}$

(٢) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع فيه أب = ٧سم ، القطران $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب ء}$ يصنعان $\overline{أب}$ مع زاويتين قياسيهما ٦٥°، ٢٨° على الترتيب أوجد طول كل من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أجـ}$.

السؤال الرابع:

(١) أوجد قيمة نهـــا $_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{٦}-١}{س^{٢}+٢س-٣}$

(٢) أوجد قياس أصغر زوايا المثلث س ص ع إذا كان س/ = ٢٧سم ، ص/ = ٣٥سم، ع/ = ١٨سم

السؤال الخامس:

(١) أوجد قيمة نهـــا $_{س \to \infty}$ $\frac{٤-٣س^{٢}}{\sqrt{س^{٤}+٥}}$

(٢) حل Δ أ ب جـ إذا كان فيه : أ/ + ب/ = ١٨٠° ، محيط Δ أب جـ = ٢٥سم ،ق (∠ جـ) = ٧٥°

الاختبار التاسع — تفاضل وحساب مثلثات

اجب عن الاسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايلى:

(١) نهـــا $_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{٢س^{٢}-٨}{س-٢}$ = ...

(٢) نهـــا $_{س \leftarrow ٠}$ (٢س^{٢} + ٣) = ...

(٣) فى Δ أ ب جـ يكون $\frac{أ/}{حا أ}$ = $\frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب جـ}}{.....}$

(٤) فى س ص ع إذا كان س/ = ص/ فإن حتا س = $\frac{ع/}{.....}$

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

(١) $\lim_{س \to 0}$ (حتا ٢س) (٣ أ، ٤ أ، ٣ أ، صفر)

(٢) فى Δ أ ب حـ إذا كان $\frac{\text{حا أ}}{أ'} = \frac{\text{حا ب}}{ب'}$ فإن $\frac{\text{٢ حا أ حا ب}}{\ldots\ldots} = \frac{\text{حا أ}}{أ'}$

(أ' + ب' أ، ٢ أ' + ب' أ، أ' - ٢ ب' أ، ٢ أ' - ب')

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٨ س^{٢}}}{س} = \ldots\ldots$ (صفر أ، ١ أ، ٢ أ، -١)

(٤) فى Δ أ ب جـ يكون المقدار $\frac{أ'^{٢} + ب'^{٢} - جـ'^{٢}}{٢ أ' ب'}$ مساويا الصفر إذا كان:

(ق(∠ أ) = ٦٠° أ، ق(∠ ب) = ٩٠° أ، ق(∠ جـ) = ١٢٠° أ، ق(∠ أ) + ق(∠ ب) = ٩٠)

السؤال الثالث:

(١) أوجد قيمة $\lim_{س \to \infty} \frac{(س^{٢}+١)(س-٢)}{٢س^{٣}+٣س+٤}$

(٢) س ص ع مثلث فيه س' = ٧سم ، ص' = ٩سم ، ع' = ٨سم أوجد مساحة المثلث .

السؤال الرابع:

(١) أوجد $\lim_{س \to ١} \frac{(س-٢)^{٤}-١}{س-١}$

(٢) Δ أ ب جـ فيه ب' = ١٠سم ، ق(∠ أ) = ٣٥° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° أوجد طول أكبر الأضلاع طولا.

السؤال الخامس:

(١) أوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢}+٥س-٦}{س^{٣}-١}$

(٢) حل المثلث أ ب جـ المتساوى الساقين الذى فيه ق(∠ ب) = ١٢٠° ، ب' = ١٠سم

الاختبار العاشر — تفاضل وحساب مثلثات

اجب على جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) $\lim_{س \to ١} (\frac{٣}{٤})^{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

(٢) فى أ ب جـ يكون: $\frac{أ'}{\text{حا أ}} = \frac{أ' + ب'}{\ldots\ldots}$

(٣) $\lim_{س \to \pi}$ (٥ حا ٢ س) = ...

(٤) إذا كانت ∠ أ تكمل ∠ جـ فإن حتا أ + حتا جـ = ...

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين:

(١) فى أى مثلث ل م ن يكون $\frac{ل}{حا ل}$ مساويًا: $(\frac{م}{حا ن}$ أ، $\frac{ن}{حا م}$ أ، $\frac{م+ن}{حا ن+حا م}$ أ، ٣ ق هـ)

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٤س^{٢}+١}}{س-٢}$ = ... (٤ أ، ٥ أ، $\frac{٥}{-٢}$ أ، ٢)

(٣) فى أى مثلث أ ب جـ يكون حتا أ=

(- (حتا ب + حتا جـ) أ، ١ - (حتا ب + حتا جـ) أ، حتا (-(ب+جـ)) أ، - حتا (ب +جـ))

(٤) $\lim_{س \to -٢} \frac{٣س^{٢}-١٢}{س+٢}$ = ... (١٨ أ، -٣ أ، ١٢ أ، -١٢)

السؤال الثالث:

(١) أوجد: $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}-٢س+١}{س^{٢}-١}$

(٢) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ب) = ٣٥° ، ق(∠ جـ) = ٧٠° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٦سم
أحسب مساحة ومحيط المثلث أب جـ لأقرب عدد صحيح.

السؤال الرابع:

(١) أوجد: $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^{٥}-٣٢}{س-١}$

(٢) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع فيه أجـ = ١٠سم ، ب ء = ٨سم فإذا تقاطع $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب ء}$ فى م وكانت ق(∠ أم ب) = ٧٠°
أوجد محيط متوازى الأضلاع.

السؤال الخامس:

(١) أوجد قيمة: $\lim_{س \to \infty} (\frac{٣}{س} + \frac{٢س^{٥}+١}{س^{٢}(س^{٣}+٢)})$

(٢) حل المثلث أب جـ الذى فيه أ/ = ٢ ، ب/ = ١٢سم، جـ/ = ٨سم

إجابات بعض التمارين

الوحدة الأولى: الدوال ذات المتغير الحقيقى ورسم المنحنيات

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) أ د ب د ج ب د جـ

(٦) أ ع ب ع ج ع

(٧) أ ٥- ب ٩- ج ٣٠١

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(٣) ع - [٣، ٥[(٤) [-٣، ٣] (٥)]١، ∞[

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(٢) شكل (١) [-٢، ٢] شكل (٢) ع - [-٢، ٢]

شكل (٣)]-∞، ٣] شكل (٤)]٠، ٤]

شكل (٥) ع - {٠} شكل (٦) ع

(٤) أ زوجية ب فردية ج فردية

(٥) أ {-٢، ٢} ب]-∞، ٠[

ج ع د]٠، ∞[

تمارين الدرس الرابع

(١) أ س - ٢ص + ٦ = ٠

ب س + ٣ص - ٥ = ٠

(٥) أ جـ = ٣٥٠ن + ٤٥٠٠

ب ٥٧٠٠٠

(٧) أ (٣، ٠)،]٠، ∞[ب (-١، ٠)،]٠، ∞[

ج (٠، -٤)]-٤، ∞[د (٠، ١)،]١، ∞[

(٩) أ د(س) = (س - ٣)^{٣} ب ر(س) = س^{٣} - ٤

ج ع(س) = (س + ٤)^{٣} - ١

(١٥) ١٦٠٠ (١٦) ٧٤٥٠٠

اجابة بعض تمارين الدرس الخامس

(١) {$\frac{١}{٢}$، -$\frac{١}{٢}$} (٢) ϕ (٣) {٢}

(٤) {-١، ٥} (٥) {-٢، ٥} (٦) {-١ ، ١}

(٧) {-١} (٨) {-٦، ١٢}

الوحدة الثانية:الاسس واللوغاريتمات

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) أ س$^{\frac{١}{٣}}$ ب أ$^{\frac{٣}{٤}}$ ج ||$^{\frac{١}{٢}}$ب$^{\frac{٣}{٤}}$

(٢) أ $\sqrt{أ}$ ب $\sqrt[٣]{ب^{٢}}$ و ٥$^{\frac{٧}{٢}}$

(٣) أ ٨ ب ٨- ج $\frac{١}{٨١}$

(٤) أ |٢| ب س$^{\frac{٥}{٦}}$ ج ٥

(٥) أ ٥ ب ٢ ج ١٦

(٧) أ {٢٥} ج {٩} هـ {١٦}

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(٢) أ (١، ٠) ب (٢، ٠)

ج ٣ د محور الصادات

(٣) أ ص = ٤٣٢٦٥٣٤١ (١,٠١٥)$^{ن - ٢٠٠٠}$

(٥) ١١٢٥٦,٨ جنية (٦) ٢٥٣

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(١) أ ٢ ب ٢ هـ {١}

(٢) أ {٢-} ب {٠} د {١، -١}

و {٥} ح (-١) ر {٣}

اجابة بعض تمارين الدرس الرابع

(٢) أ {١٠} ب {١٢٣} و {٣}

(٥) أ ١,١٧٦ ب ٤,٧٥٥ ج ٢,١٨٩

اجابة بعض تمارين الدرس الخامس

(١) أ ٣ ب ١ ج $\frac{١}{٢}$

(٢) أ لوس + لو(س + ١) ب لوس - لو(س ٤)

اجابة بعض التمارين عامة

(١) أ ±٢ ب ٢ ج $\frac{١}{٢}$

(٢) أ ٣ ب ٠,١ د ٤

(٤) ١,١ (٦) أ د(ر) = ١٠٠٠ (١,٠٩)^{ن}

(٨) أ ٠,٧٧٨ ب ٠,١٧٦ ج ٠,٦٩٩

(٩) أ (١٠) ب {-٣}

اجابة اختبار تراكمى

(١) أ]٢، ∞[ب ع - {٠} ج]٢، ∞[

(٢) أ د$^{-١}$ = {(٣، ١)، (-١، ٢)، (٠، ٣)}

(٣) أ ٢ ب $\frac{١}{٢}$ و -٥

(٧) أ ٤,٩٣ ب ٢٣,٢٤

(٨) أ نمو ب نمو د تضاؤل

الوحدة الثالثة: النهايات

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) أ ١ ب ١

(٣) أ ٠ ب ٠

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(١) ٧ (٢) ٠ (٣) -١

(٦) ١٢ (٧) ٣ (٨) ٢٤

(١٣) ليس لها نهاية (١٤) -١

(٢٤) ليس لها وجود (٢٥) ٢

(٥١) ٧ (٥٢) ٣٢ (٥٣) ٤٨

(٥٤) ٤٠٥ (٥٥) ٢٢٤ (٥٧) ١٢

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(١) ١ (٢) -٢ (١١) ٣

(١٢) ١ (١٣) ٠ (١٦) ٠

(٢٢) ٠ (٢٤) ٠ (٢٥) ٢

اجابة بعض التمارين عامة

(١) ٣، غير معينة (٢) ٠، -٢

(٣) -٢، -٢ (٤) ١ (٦) ٠

(٧) ليس لها وجود (٩) ٢٧

(١٠) ١٠ (١١) ١٠

اجابة اختبار تراكمى

(١) أ $\frac{١}{س - ١}$ ب $\frac{١}{س + ١}$ ج $\frac{س + ٥}{س - ٥}$

(٢) ن$_{١}$ = ن$_{٢}$ (٣) $\frac{٧س - ١}{س^{٢} - ١}$ حيث س ∈ {١، -١}

(٤) $\frac{٤س^{٢} + ٥س - ٣}{٣س^{٢}}$ حيث س ∈ {١، -١}

(٥) $\frac{٤س^{٢} + ٥س - ٣}{٣س^{٢}}$ (٨) ليس لها وجود

(١٠) أ غير معرفة ب ليس لها وجود

ج غير معينة د ٣

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١٣) أ ≃ ٧,٤سم ب ≃ ٩,٢سم

(٢٢) ٢١,٢٤سم (٢٣) ١١٧,٥سم (٢٤) ١١,٢٥سم

(٢٧) ٧٠°، ٤٨° أو ١١٠°، ٨°

(٢٨) ٨٧°، ٤٥° أو ٩٣°، ٣٩°

(٢٩) ٤٤°، ١١٢,٤° أو ١٣٦°، ٢٠,٤°

(٣٢) ٥سم، ١٢سم (٣٣) ٢٧سم

(٣٥) ≃ ٣٥,٤٦سم، ≃ ٤٨,١٤سم

(٤٠) أ/ = √٦٨سم، ب/ = ٢سم

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(٣) أ ≃ ٤٧,٣° ب ≃ ٣٧,١سم

ج ٢٧° د ≃ ٢٧,٩٣سم

(٤) ج ٦٠° د ١٢٠°

هـ ≃ ٥٨/٣° و ≃ ٧٨/٢٨°

(٦) و(∠جـ) = ١٢٠° (٧) √٢٢٨سم

(١٠) أ جـ = ١٨سم (١٢) أ جـ = ١٧سم

(١٣) ١٤ : ١١ : ٤- (١٥) ١٠٠,٢سم

إجابة بعض التمارين العامة

(٧) ≃ ٢٨,٢٦٥سم، ≃ ٢٣,٧٢سم

(٩) ٢٥سم، ٣٠,٩سم، ٢٤,٥سم

(١٠) ٢٤سم، ٤,٧٥سم (١١) ١٦سم

(١٢) ١٩,٥٥سم، ١١,٨٤سم (١٥) $\frac{٣}{٤}$

الاختبار التراكمى

(١) ب (٢) د (٣) أ

(٤) أ (٥) أ (٦) جـ

(٨) √١٠٨ = ١٤,١سم

(٩) ٩// ٤٩/ ٨٢°، = ٩,٩٢سم٢

الاختبارات العامة

الاختبار الأول

السؤال الأول: أكمل ما يأتى:

(١) أ أ- ع - {-١} ب ع - {٠}

(٢)]-∞، ٠[،]٠، ∞[(٣) ٢

(٤) $\frac{١}{٢٥}$

السؤال الثانى

(١) د (٢) أ (٣) ب

السؤال الثالث:

(٢) س = ٣٠

السؤال الرابع

(١) ع -]-٢، ٨[

الاختبار السابع

السؤال الأول:

(١) $\frac{١}{٢}$ (٢) $\frac{\sqrt{٣}٢}{٣}$ (٣) صفر

السؤال الثانى:

(١) ١ (٢) ٣ : ٤ : ٦ (٣) ٦

السؤال الرابع

(١) ٢

(٢) جـ/ = ٦,٤سم ، مساحة الدائرة = ٥٧,٣سم٢

السؤال الخامس

(١) $\frac{٩}{٢}$